

Resolução da Ficha 1

1. (a) Para cada par de valores reais de a e b a expressão

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{se } x < -1 \\ ax+b & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

define uma função real de variável real. Determine a e b de modo que seja contínua para $x = -1$ e $x = 0$.

- (b) Para cada par de valores reais de a e b a expressão

$$f(x) = \begin{cases} \arctan x + a & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{se } 0 < x < 1 \\ b & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

define uma função real de variável real. Determine a e b de modo que seja contínua em todo o seu domínio.

Resolução.

- (a) A função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{se } x < -1 \\ ax+b & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 3 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, pois está definida através de expressões polinomiais e racionais. Basta portanto estudar a continuidade em $x = -1$ e $x = 0$.

Para que f seja contínua em $x = -1$ e $x = 0$, tem de se verificar que

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \quad (1)$$

Calculemos esses limites:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} ax+b = b-a \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} ax+b = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} 3 = 3 \end{aligned}$$

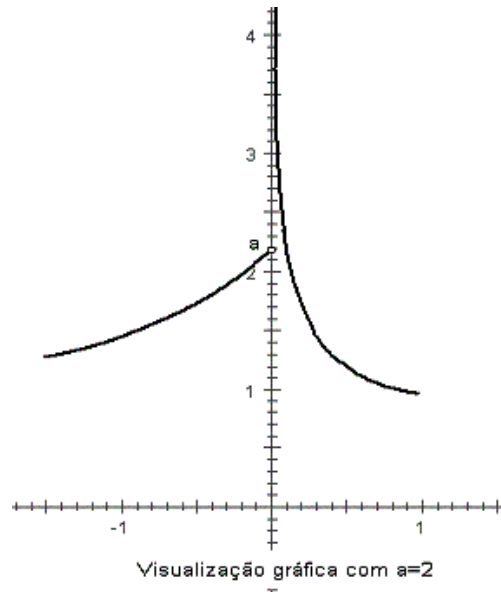
Sendo assim, para que (1) se verifique é necessário que

$$\begin{cases} b-a=0 \\ b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=3 \end{cases}$$

(b) Temos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan x + a = 0 + a = a \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

o que mostra que a função nunca pode ser contínua em $x = 0$. Sendo assim, a função nunca pode ser contínua em todo o seu domínio.



2. Considere a função $f(x) = |x^4 - 3x| - 5$.

- (a) Pode garantir, utilizando o Teorema de Bolzano, a existência de $c \in]-1, 1[$ tal que $f(c) = -5$? E tal que $f(c) = -2$? Justifique.
- (b) Prove que f tem um zero no intervalo $]1, 2[$.

Resolução.

- (a) A função $f(x) = |x^4 - 3x| - 5$ é contínua em \mathbb{R} , e portanto é contínua em $[-1, 1]$. Como $f(-1) = -1$, $f(1) = -3$ e $-5 \notin]-3, -1[$, o Teorema de Bolzano não garante a existência de $c \in]-1, 1[$ tal que $f(c) = -5$ (observe-se, no entanto, que $c = 0$ satisfaz a condição dada).
Uma vez que $-2 \in]-3, -1[$, pelo Teorema de Bolzano existe $c \in]-1, 1[$ tal que $f(c) = -2$.
- (b) Como anteriormente, f é contínua em $[1, 2]$. Uma vez que $f(1) = -3$ e $f(2) = 5$, verifica-se a condição

$$f(1) \cdot f(2) < 0.$$

Logo, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, conclui-se que f tem um zero no intervalo $]1, 2[$.

3. Determine as assíntotas ao gráfico de

$$f(x) = \begin{cases} xe^{x+1} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{x}{x-2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Resolução. Começemos por estudar as assíntotas verticais:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} xe^{x+1} = 0 & \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x-2} = 0 & \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Logo $x = 2$ é uma assíntota vertical.

Quanto às assíntotas não verticais:

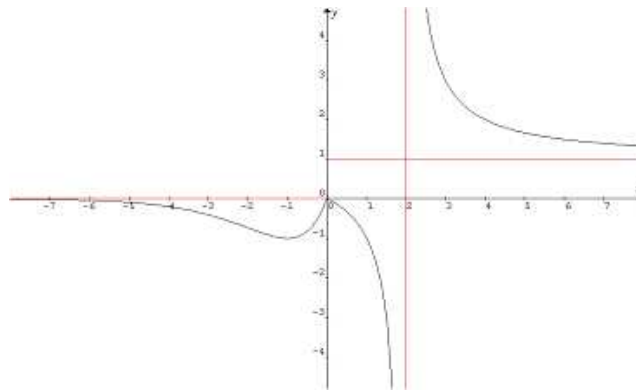
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x+1} = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{x+1} = 0$$

Logo $y = 0$ é uma assíntota horizontal à esquerda.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{x-2}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-2} = 1$$

Logo $y = 1$ é uma assíntota horizontal à direita.

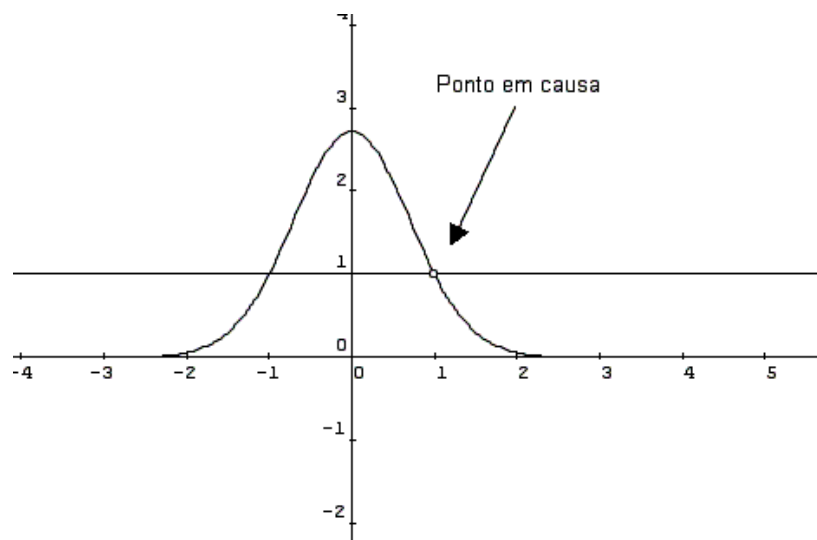
Neste gráfico apresenta-se a função e as respectivas assíntotas (a vermelho).



4. Determine as equações das rectas tangente e ortogonal ao gráfico da função $f(x) = e^{1-x^2}$, para $x > 0$, no ponto de intersecção com a recta $y = 1$.

Resolução. Começemos por determinar as coordenadas do ponto em causa:

$$e^{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -1.$$



Sendo assim, e tendo em conta o enunciado, as coordenadas do ponto são $(1, 1)$.

Como $f'(x) = -2xe^{1-x^2}$, vem que $f'(1) = -2$.

Assim, a equação da recta tangente é

$$r = f'(1)(x - 1) + f(1) \Leftrightarrow r = -2(x - 1) + 1$$

e a equação da recta ortogonal é

$$r = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1) + f(1) \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}(x - 1) + 1.$$