

Resolução da Ficha 2

1. Enuncie o Teorema de Rolle e estude a sua aplicabilidade às funções:

- (a) $f(x) = |x - 2|$, no intervalo $[0, 4]$;
 (b) $f(x) = \cos x + |x|$, no intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
 (c) $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$, no intervalo $[0, 2]$.

Justifique.

Resolução.

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ contínua em } [a, b] \\ f \text{ diferenciável em }]a, b[\\ f(a) = f(b) \end{array} \right\} \text{T.Rolle} \Rightarrow \exists c \in]a, b[: f'(c) = 0$$

(a) $f(x) = |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{se } x \geq 2 \\ 2 - x & \text{se } x < 2 \end{cases}$

A função f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Falta ver a continuidade em $x = 2$.

Uma vez que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (2 - x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = 0 \text{ e} \\ f(2) &= 0, \end{aligned}$$

a função é contínua em \mathbb{R} .

A função é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Falta ver a diferenciabilidade em $x = 2$.

Como

$$\begin{aligned} f'(2^-) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2 - x - 0}{x - 2} = -1 \text{ e} \\ f'(2^+) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2 - 0}{x - 2} = 1, \end{aligned}$$

vem que $f'(2^-) \neq f'(2^+)$, e logo a função não é diferenciável em \mathbb{R} .

Sendo assim, o Teorema de Rolle não é aplicável a f no intervalo $[0, 4]$.

(b) $f(x) = \begin{cases} \cos x + x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \cos x - x, & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0[\end{cases}$

Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (\cos x - x) = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x + x) = 1 \text{ e} \\ f(0) &= 1, \end{aligned}$$

podemos concluir que f é contínua em \mathbb{R} .

Como $f'(0^-) = -1$ e $f'(0^+) = 1$, f não é diferenciável em $x = 0$, e logo não é possível aplicar o Teorema de Rolle a esta função no intervalo dado.

(c)

$$\left. \begin{array}{l} f \text{ cont\u00ednua em } [0, 2] \\ f \text{ diferenci\u00e1vel em }]0, 2[\\ f(0) = f(2) = 1 \end{array} \right\} \text{T.Rolle} \Rightarrow \exists c \in]0, 2[: f'(c) = 0$$

2. Seja $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$. Identifique os zeros de f . Indique, justificando, qual \u00e9 o n\u00famero m\u00ednimo de zeros das fun\u00e7\u00f5es $f'(x)$, $f''(x)$ e $f'''(x)$ (sugest\u00e3o: utilize o Teorema de Rolle). Poder\u00e1, nestes casos, existir um n\u00famero de zeros superior ao indicado?

Resolu\u00e7\u00e3o. Os zeros de f s\u00e3o $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$. Sendo assim, f' tem pelo menos 3 zeros (o Teorema de Rolle garante que entre dois zeros consecutivos de f existe pelo menos um zero de f'). Aplicando o mesmo racioc\u00ednio, vamos ter que f'' tem pelo menos 2 zeros e f''' pelo menos 1 zero. Por outro lado, como f' corresponde a um polin\u00f4mio de 3\u00b0 grau, f'' corresponde a um polin\u00f4mio de 2\u00b0 grau e f''' corresponde a um polin\u00f4mio de 1\u00b0 grau, temos tamb\u00e9m a certeza que n\u00e3o pode haver n\u00famero de zeros superior ao indicado para cada caso.

3. Verifique que a aplica\u00e7\u00e3o $f(x) = x - x^3$ satisfaz o Teorema de Lagrange em $[-2, 1]$ e determine o(s) valor(es) $c \in]-2, 1[$.

Resolu\u00e7\u00e3o. A fun\u00e7\u00e3o f \u00e9 cont\u00ednua e diferenci\u00e1vel em \mathbb{R} , donde, pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in]-2, 1[$ tal que $f'(c) = \frac{f(1) - f(-2)}{1 - (-2)}$, ou seja, $1 - 3c^2 = \frac{0 - 6}{3} \Leftrightarrow c^2 = 1$. Tendo em conta o intervalo dado, temos $c = -1$.

4. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \ln(x-1)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot \frac{1}{\ln x} x$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\sin x)}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

Resolu\u00e7\u00e3o.

(a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \ln(x-1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} \stackrel{R.C.}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{\ln^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x \ln^2 x}{x-1} \stackrel{R.C.}{=} \\ &= \lim_{R.C.}{x \rightarrow 1^+} \frac{-\ln^2 x - 2 \ln x}{1} = 0 \end{aligned}$$

(b) Seja $K = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cot \frac{1}{\ln x} x$. Vamos calcular $\ln K$:

$$\begin{aligned} \ln K &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \cot \frac{1}{\ln x} x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\cot \frac{1}{\ln x} x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\ln x} \stackrel{R.C.}{=} \\ &= \lim_{R.C.}{x \rightarrow 0^+} \frac{-1/\sin^2 x}{\frac{\cot x}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x/\sin^2 x}{\cot x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{\sin^2 x \cot x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{\sin x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\cos x} = -1 \end{aligned}$$

Sendo assim, $\ln K = -1 \Rightarrow K = \frac{1}{e}$, e consequentemente o limite pretendido é igual a $\frac{1}{e}$.

(c) Seja $K = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$. Calculemos $\ln K$:

$$\ln K = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x)}{x} \stackrel{R.C.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = 2$$

Sendo assim, $\ln K = 2 \Rightarrow K = e^2$, e consequentemente o limite pretendido é igual a e^2 .

(d) Utilizando os limites notáveis $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{\sin(2x)} = 1$, vem

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin(2x))}{\ln(\sin x)} &\stackrel{R.C.}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2 \cos(2x)}{\sin(2x)}}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos(2x) \sin x}{\cos x \sin(2x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \cos(2x) \sin x}{x \cos x \sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(2x)}{\cos x} = 1 \end{aligned}$$

(e)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \stackrel{R.C.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2} = 0$$

(f) Seja $K = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}}$.

$$\begin{aligned} \ln K &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} \stackrel{R.C.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{2x(1 + x^2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + x^2} = 1 \end{aligned}$$

$\ln K = 1 \Rightarrow K = e$, e consequentemente o limite pretendido é igual a e .

(g) Seja $K = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

$$\ln K = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} \stackrel{R.C.}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{1} = 0$$

$\ln K = 0 \Rightarrow K = 1$, e consequentemente o limite pretendido é igual a 1.

5. Considere as seguintes funções

(i) $f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x}$

(iv) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

(ii) $g(x) = (1 - 2x)e^{-x}$

(v) $g(x) = -x + 2 \arctan x$

(iii) $h(x) = \frac{e^{1/x}}{x}$

(vi) $h(x) = x + \frac{1}{x^2}$

e determine para cada uma delas:

- (a) domínio e assíntotas;
- (b) intervalos de monotonia e extremos relativos;
- (c) sentido da concavidade e pontos de inflexão;
- (d) esboço do gráfico e contradomínio.

Resolução.

$$(i) f(x) = \frac{e^x}{1 - e^x}$$

$$(a) D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - e^x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{1 - e^x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{1 - e^x} = -\infty$$

Logo $x = 0$ é assíntota vertical.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^x}{1 - e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x(1 - e^x)} = \frac{0^+}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1 - e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{1 - e^x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x(1 - e^x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = -1 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 - e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{-e^x} = -1$$

Logo $y = 0$ é uma assíntota horizontal à esquerda e $y = -1$ é uma assíntota horizontal à direita.

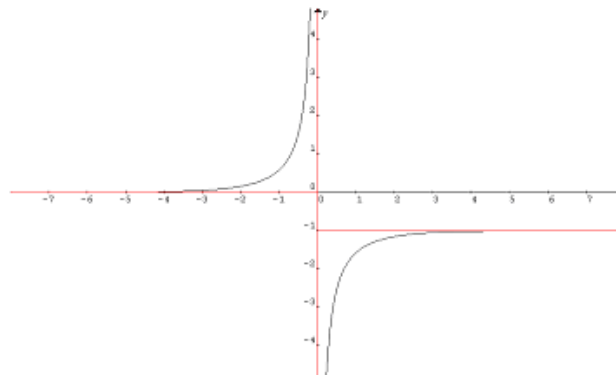
$$(b) f'(x) = \frac{e^x(1 - e^x) - (-e^x)e^x}{(1 - e^x)^2} = \frac{e^x}{(1 - e^x)^2}$$

	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x	+	+	1	+	+
$(1 - e^x)^2$	+	+	×	+	+
$f'(x)$	+	+	×	+	+
$f(x)$	↑	↑	×	↑	↑

$$(c) f''(x) = \frac{e^x(1 - e^x)^2 - 2(1 - e^x)(-e^x)e^x}{(1 - e^x)^4} = \frac{e^x(1 + e^x)}{(1 - e^x)^3}$$

	$-\infty$		0		$+\infty$
$e^x(1 + e^x)$	+	+	2	+	+
$(1 - e^x)^3$	+	+	×	-	-
$f''(x)$	+	+	×	-	-
$f(x)$	∪	∪	×	∩	∩

(d) Esboço do gráfico:



$$D' = \mathbb{R} \setminus [-1, 0]$$

(ii) $g(x) = (1 - 2x)e^{-x}$

(a) $D = \mathbb{R}$

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1 - 2x)e^{-x}}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 - 2x)e^{-x}}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - 2x)e^{-x} = 0$$

Logo $y = 0$ é uma assíntota horizontal à direita.

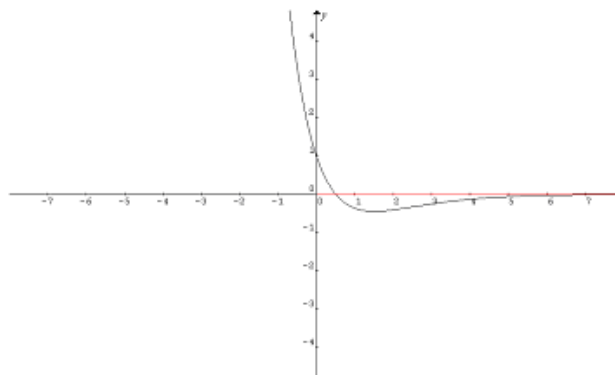
(b) $g'(x) = -2e^{-x} - e^{-x}(1 - 2x) = e^{-x}(2x - 3)$

	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
e^{-x}	+	+	+	+	+
$2x - 3$	-	-	0	+	+
$g'(x)$	-	-	0	+	+
$g(x)$	↓	↓	m	↑	↑

(c) $g''(x) = -2e^{-x} - e^{-x}(2x - 3) = e^{-x}(5 - 2x)$

	$-\infty$		$5/2$		$+\infty$
e^{-x}	+	+	+	+	+
$5 - 2x$	+	+	0	-	-
$g''(x)$	+	+	0	-	-
$g(x)$	∪	∪	<i>P.I.</i>	∩	∩

(d) Esboço do gráfico:



$$D' = [g(3/2), +\infty[= [-2e^{-3/2}, +\infty[$$

(iii) $h(x) = \frac{e^{1/x}}{x}$

(a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{1/x}}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{1/x}}{x} = +\infty$$

Logo $x = 0$ é assíntota vertical à direita.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{e^{1/x}}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{1/x}}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{1/x}}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{1/x}}{x} = 0$$

Logo $y = 0$ é uma assíntota horizontal

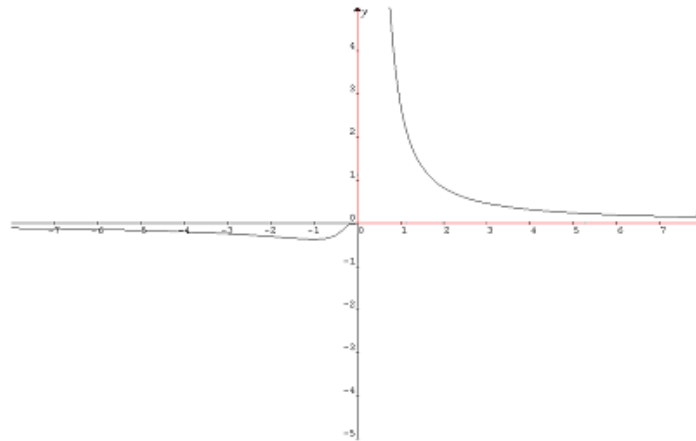
(b) $h'(x) = \frac{-e^{1/x}(1+x)}{x^3}$

	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$-e^{1/x}$	-	-	-	-	×	-	-
$1+x$	-	-	0	+	+	+	+
x^3	-	-	-	-	×	+	+
$h'(x)$	-	-	0	+	×	-	-
$h(x)$	↓	↓	m	↑	×	↓	↓

(c) $h'(x) = \frac{e^{1/x}(2x^2 + 4x + 1)}{x^5}$

	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$		$\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$		0		$+\infty$
$e^{1/x}$	+	+	+	+	+	+	×	+	+
$2x^2 + 4x + 1$	+	+	0	-	0	+	+	+	+
x^5	-	-	-	-	-	-	0	+	+
$h''(x)$	-	-	0	+	0	-	×	+	+
$h(x)$	∩	∩	$P.I.$	∪	$P.I.$	∩	×	∪	∪

(d) Esboço do gráfico:



$$D' = [h(-1), +\infty] \setminus \{0\} = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right] \setminus \{0\}$$

(iv) $f(x) = \frac{x}{e^x}$

(a) $D = \{x \in \mathbb{R} : e^x \neq 0\} = \mathbb{R}$

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{e^x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{e^x}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

Logo $y = 0$ é uma assíntota horizontal à direita.

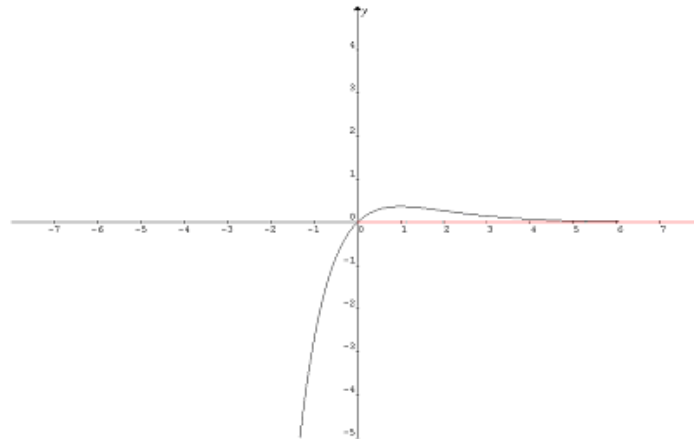
(b) $f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x}$

	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$	+	+	0	-	-
e^x	+	+	+	+	+
$f'(x)$	+	+	0	-	-
$f(x)$	↑	↑	M	↓	↓

(c) $f''(x) = \frac{-e^x - (1-x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{x-2}{e^x}$

	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$	-	-	0	+	+
e^x	+	+	+	+	+
$f''(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	∩	∩	$P.I.$	∪	∪

(d) Esboço do gráfico:



$$D' =]-\infty, f(-1)] = \left] -\infty, \frac{1}{e} \right]$$

(v) $g(x) = -x + 2 \arctan x$

(a) $D = \mathbb{R}$

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \mp\infty$$

Logo não existem assíntotas.

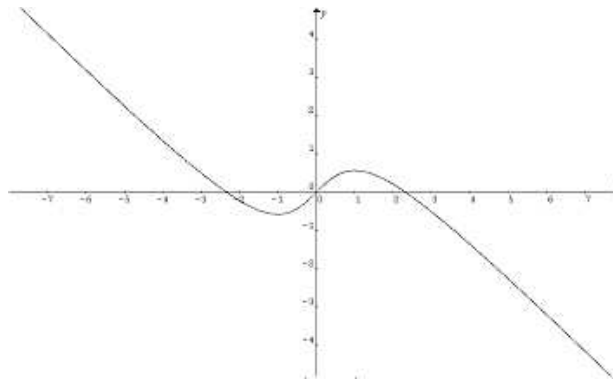
(b) $g'(x) = -1 + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$
$1+x^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	\downarrow	m	\uparrow	M	\downarrow

(c) $g''(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$

	$-\infty$		0		$+\infty$
$-4x$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$(1+x^2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$g''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
$g(x)$	\cup	\cup	$P.I.$	\cap	\cap

(d) Esboço do gráfico:



$D' = \mathbb{R}$

(vi) $h(x) = x + \frac{1}{x^2}$

(a) $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2} \right) = 1$$

Logo não existem assíntotas verticais.

Assíntotas não verticais:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \frac{x^3 + 1}{x^3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \mp\infty} (h(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \mp\infty} \left(x + \frac{1}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Logo $y = x$ é uma assíntota horizontal.

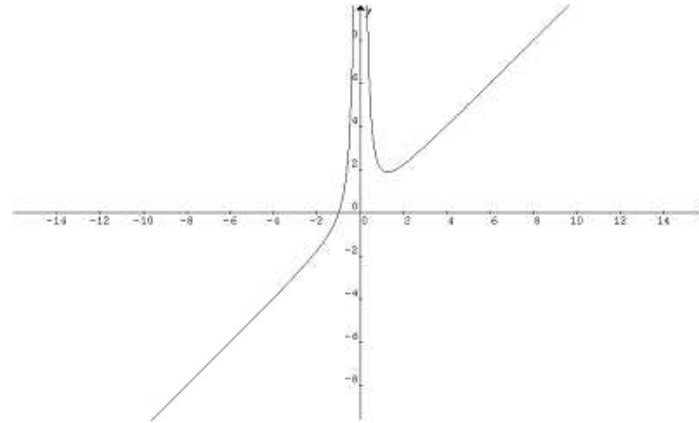
(b) $h'(x) = 1 - \frac{2}{x^3}$

	$-\infty$	0		$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	\times	$-$	0	$+$
$h(x)$	\uparrow	\times	\downarrow	m	\uparrow

(c) $h''(x) = \frac{6}{x^4}$

	$-\infty$		0		$+\infty$
$h''(x)$	+	+	×	+	+
$h(x)$	∪	∪	×	∪	∪

(d) Esboço do gráfico:



$D' = \mathbb{R}$