



Resolução da Ficha 3

1. Calcule as seguintes primitivas (imediatas ou quase-imediatas):

(a) $P \cos^3(x) \sin(x)$

(b) $P \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}$

(c) $P \frac{\cos(x)}{2 \sin(x) + 3}$

(d) $P \frac{1}{x \ln(x)}$

(e) $P \frac{1}{(1+x^2) \arctan(x)}$

(f) $P \frac{\cos(\ln(x))}{x}$

(g) $P \frac{1}{9x^2 + 4}$

(h) $P(e^{2x})^2$

(i) $P \frac{\sqrt{\arctan(2x)}}{1+4x^2}$

(j) $P \frac{1}{\sqrt{8-x^2}}$

(k) $P \tan\left(\frac{x}{3}\right) \sec^2\left(\frac{x}{3}\right)$

(l) $P \frac{\sin(3x)}{3 + \cos(3x)}$

(m) $P \frac{\sqrt[3]{1+\ln(x)}}{x}$

(n) $P \frac{e^{\arctan(x)} + x \ln(1+x^2) + 1}{1+x^2}$

(o) $P \frac{2x+3}{2x+1}$

(p) $P \frac{\arccos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{4-x^2}}$

(q) $P e^{-\tan(x)} \sec^2(x)$

(r) $P \frac{\sin(5x)}{1 + \cos^2(5x)}$

Resolução.

(a) $P \cos^3(x) \sin(x) = -\frac{1}{4} \cos^4(x) + K$

(b) $P \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)} = P \tan(x) \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{1}{2} \tan^2(x) + K$

(c) $P \frac{\cos(x)}{2 \sin(x) + 3} = P \frac{1}{2} \left(2 \cos(x) \frac{1}{2 \sin(x) + 3} \right) = \frac{1}{2} \ln |2 \sin(x) + 3| + K$

(d) $P \frac{1}{x \ln(x)} = P \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} = \ln |\ln(x)| + K$

(e) $P \frac{1}{(1+x^2) \arctan(x)} = P \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan(x)} = \ln |\arctan(x)| + K$

(f) $P \frac{\cos(\ln(x))}{x} = P \frac{1}{x} \cos(\ln(x)) = \sin(\ln(x)) + K$

(g) $P \frac{1}{9x^2 + 4} = P \frac{\frac{1}{9}}{1 + \frac{4}{9}x^2} = P \frac{\frac{1}{4}}{1 + \left(\frac{3}{2}x\right)^2} = \frac{1}{4} \frac{2}{3} \arctan\left(\frac{3}{2}x\right) = \frac{1}{6} \arctan\left(\frac{3}{2}x\right) + K$

(h) $P(e^{2x})^2 = P e^{4x} = \frac{1}{4} e^{4x} + K$

(i) $P \frac{\sqrt{\arctan(2x)}}{1+4x^2} = P \frac{1}{1+4x^2} \arctan^{\frac{1}{2}}(2x) = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \arctan^{\frac{3}{2}}(x) = \frac{1}{3} \arctan^{\frac{3}{2}}(x) + K$

(j) $P \frac{1}{\sqrt{8-x^2}} = P \frac{\frac{1}{\sqrt{8}}}{\sqrt{8-x^2}} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}x\right) + K$

$$(k) P \tan\left(\frac{x}{3}\right) \sec^2\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{4} 3 \tan^4\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{3}{4} \tan^4\left(\frac{x}{3}\right) + K$$

$$(l) P \frac{\sin(3x)}{3 + \cos(3x)} = -\frac{1}{3} P - 3 \sin(3x) \frac{1}{3 + \cos(3x)} = -\frac{1}{3} \ln |3 + \cos(3x)| + K$$

$$(m) P \frac{\sqrt[3]{1 + \ln(x)}}{x} = P \frac{1}{x} \sqrt[3]{1 + \ln(x)} = \frac{3}{4} (1 + \ln(x))^{\frac{4}{3}} + K$$

$$(n) P \frac{e^{\arctan(x)} + x \ln(1 + x^2) + 1}{1 + x^2} = P \left(\frac{e^{\arctan(x)}}{1 + x^2} + \frac{x \ln(1 + x^2)}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + x^2} \right) = e^{\arctan(x)} + \frac{1}{4} \ln^2(1 + x^2) + \arctan(x) + K$$

$$(o) P \frac{2x + 3}{2x + 1} = P \left(1 + \frac{2}{2x + 1} \right) = x + \ln |2x + 1| + K$$

$$(p) P \frac{\arccos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{4 - x^2}} = P \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \arccos\left(\frac{x}{2}\right) = P \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}} \arccos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \arccos^2\left(\frac{x}{2}\right) + K$$

$$(q) P e^{-\tan(x)} \sec^2(x) = P - (-\sec^2(x) e^{-\tan(x)}) = -e^{-\tan(x)} + K$$

$$(r) P \frac{\sin(5x)}{1 + \cos^2(5x)} = P - \frac{1}{5} \frac{-5 \sin(5x)}{1 + \cos^2(5x)} = -\frac{1}{5} \arctan(\cos(5x)) + K$$

2. Calcule as seguintes primitivas (por partes):

$$(a) P x^2 \sin(x)$$

$$(d) P x \arcsin(x^2)$$

$$(g) P \sin(x) \tan^2(x)$$

$$(b) P \sin^2(x)$$

$$(e) P x e^x$$

$$(c) P \ln(x)$$

$$(f) P x^3 e^{x^2}$$

Resolução.

(a) Aplicando uma vez a fórmula da primitivação por partes, com

$$\begin{aligned} g &= x^2 & e & f = \sin(x) \\ g' &= 2x & e & P f = -\cos(x) \end{aligned}$$

vem

$$P x^2 \sin(x) = -\cos(x) x^2 - P(-\cos(x) 2x) = -\cos(x) x^2 + 2P \cos(x) x. \quad (1)$$

Aplicando agora a fórmula da primitivação por partes a $P \cos(x) x$, vem

$$P \cos(x) x = \sin(x) x - P \sin(x) = \sin(x) x + \cos(x) + K.$$

Substituindo em (1) vem que

$$P x^2 \sin(x) = -\cos(x) x^2 + 2(\sin(x) x + \cos(x)) + K.$$

(b) Por partes, fazendo

$$\begin{aligned} g &= \sin(x) & e & f = \sin(x) \\ g' &= \cos(x) & e & P f = -\cos(x) \end{aligned}$$

vem que

$$\begin{aligned} P \sin^2(x) &= -\cos(x) \sin(x) - P(-\cos^2(x)) = -\frac{1}{2} \sin(2x) P \cos^2(x) = \\ &= -\frac{1}{2} \sin(2x) + P(1 - \sin^2(x)) = -\frac{1}{2} \sin(2x) + x - P \sin^2(x). \end{aligned}$$

Sendo assim, temos a igualdade

$$\begin{aligned} P \sin^2(x) &= -\frac{1}{2} \sin(2x) + x - P \sin^2(x) + K \\ \Leftrightarrow 2P \sin^2(x) &= -\frac{1}{2} \sin(2x) + x + K \\ \Leftrightarrow P \sin^2(x) &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin(2x) + K. \end{aligned}$$

De forma alternativa, recordemos que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \Leftrightarrow \cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x) \Leftrightarrow \cos(2x) = 2 \cos^2(x) - 1,$$

donde $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ e $\cos^2(x) = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$. Sendo assim,

$$P \sin^2(x) = P \frac{1 - \cos(2x)}{2} = P \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \right) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin(2x) + K.$$

(c) Por partes, fazendo

$$\begin{aligned} g &= \ln(x) & \text{e} & \quad f = 1 \\ g' &= \frac{1}{x} & \text{e} & \quad Pf = x \end{aligned}$$

vem que

$$P \ln(x) = x \ln(x) - Px \frac{1}{x} = x \ln(x) - P1 = x \ln(x) - x + K.$$

(d) Por partes, fazendo

$$\begin{aligned} g &= \arcsin(x^2) & \text{e} & \quad f = x \\ g' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \text{e} & \quad Pf = \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

vem

$$\begin{aligned} Px \arcsin(x^2) &= \frac{x^2}{2} \arcsin(x^2) - Px \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin(x^2) - P \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{x^2}{2} \arcsin(x^2) - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2} + K. \end{aligned}$$

(e) Por partes, fazendo

$$\begin{aligned} g &= x & \text{e} & \quad f = e^x \\ g' &= 1 & \text{e} & \quad Pf = e^x \end{aligned}$$

vem

$$Pxe^x = e^x x - Pe^x = e^x(x - 1) + K.$$

(f) Por partes, fazendo

$$\begin{aligned} g &= x^3 & \text{e} & \quad f = e^x \\ g' &= 3x^2 & \text{e} & \quad Pf = e^x \end{aligned}$$

vem que

$$Px^3e^x = e^x x^3 - 3Pe^x x^2.$$

Aplicando agora a fórmula da primitivação por partes a $Pe^x x^2$, temos que

$$Pe^x x^2 = e^x x^2 - 2Pe^x x.$$

Uma vez que $Pxe^x = e^x x - Pe^x = e^x(x - 1) + K$, obtemos

$$Px^3e^x = e^x x^3 - 3(e^x x^2 - 2(e^x x^2 - e^x(x - 1))) = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + K.$$

(g) Por partes, fazendo

$$g = \tan^2(x) \quad \text{e} \quad f = \sin(x)$$

$$g' = 2 \tan(x) \frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{2 \sin(x)}{\cos^3(x)} \quad \text{e} \quad Pf = -\cos(x)$$

vem que

$$\begin{aligned} P \sin(x) \tan^2(x) &= -\cos(x) \tan^2(x) - P - \cos(x) \frac{2 \sin(x)}{\cos^3(x)} = \\ &= -\cos(x) \tan^2(x) + 2P \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \\ &= -\cos(x) \tan^2(x) + \frac{2}{\cos(x)} + K. \end{aligned}$$

3. Calcule as seguintes primitivas (racionais):

(a) $P \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}$

(b) $P \frac{x - 8}{x^3 - 4x^2 + 4x}$

(c) $P \frac{1}{x^3 + 1}$

Resolução.

(a) 1º Passo: Divisão dos polinômios.

$$\begin{array}{r} x^5 + x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x - 8 \quad \left| \begin{array}{l} x^3 - 4x \\ x^2 + x + 4 \end{array} \right. \\ -(x^5 + 0x^4 - 4x^3 + 0x^2 + 0x + 0) \\ \hline + x^4 + 4x^3 + 0x^2 + 0x - 8 \\ -(+ x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 0x + 0) \\ \hline + 4x^3 + 4x^2 + 0x - 8 \\ -(+ 4x^3 + 0x^2 - 16x + 0) \\ \hline + 4x^2 + 16x - 8 \end{array}$$

Consequentemente,

$$\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x^2 - 4)} = x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x - 2)(x + 2)}$$

2º Passo: Transformar $\frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x - 2)(x + 2)}$ numa soma de termos primitiváveis.

$$\begin{aligned} \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2} &= \frac{Ax^2 - 4A + Bx^2 + 2xB + Cx^2 - 2xC}{x(x - 2)(x + 2)} = \\ &= \frac{(A + B + C)x^2 + (2B - 2C)x - 4A}{x(x - 2)(x + 2)} \end{aligned}$$

Obtemos então o sistema

$$\begin{cases} A + B + C = 4 \\ 2(B - C) = 16 \\ -4A = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B + C = 2 \\ B - C = 8 \\ A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2C = -6 \\ B = 8 + C \\ A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -3 \\ B = 5 \\ A = 2 \end{cases}$$

Assim, $\frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x - 2)(x + 2)} = \frac{2}{x} + \frac{5}{x - 2} - \frac{3}{x + 2}$.

3º Passo: Primitivar todos os termos da soma obtida.

Como $\frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} = x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x - 2} - \frac{3}{x + 2}$, temos que

$$\begin{aligned} P \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} &= P \left(x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x - 2} - \frac{3}{x + 2} \right) = \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 4x + 2 \ln|x| + 5 \ln|x - 2| - 3 \ln|x + 2| + K. \end{aligned}$$

(b) Neste caso, não é necessário efectuar a divisão dos polinómios.

2º Passo: Transformar $\frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}$ numa soma de termos primitiváveis.

Como $\frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} = \frac{x-8}{x(x^2-4x+4)} = \frac{x-8}{x(x-2)^2}$, vem que

$$\begin{aligned} \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-2} &= \frac{Ax^2 - 4xA + 4A + Bx + Cx^2 - 2xC}{x(x-2)^2} = \\ &= \frac{(A+C)x^2 + (B-2C-4A)x + 4A}{x(x-2)^2}. \end{aligned}$$

Temos então o sistema

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B - 2C - 4A = 1 \\ 4A = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2 \\ B = -3 \\ A = -2 \end{cases}$$

e logo $\frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} = \frac{2}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{2}{x}$.

3º Passo: Primitivar todos os termos da soma obtida.

As primitivas de $\frac{2}{x-2}$ e $\frac{2}{x}$ são simples logaritmos neperianos. A primitiva de $\frac{3}{(x-2)^2}$ obtém-se pela regra da potência. Consequentemente,

$$P \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x} = P \left(\frac{2}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} - \frac{2}{x} \right) = 2 \ln |x-2| - 2 \ln |x| + \frac{3}{x-2} + K.$$

(c) Neste caso não é necessário efectuar a divisão dos polinómios.

2º Passo: Transformar $\frac{1}{x^3+1}$ numa soma de termos primitiváveis.

Comecemos por decompor x^3+1 em factores (dividindo x^3+1 por $x+1$, uma vez que $x=-1$ é raiz de x^3+1).

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} x^3 \quad + \quad 0x^2 \quad + \quad 0x \quad + \quad 1 \\ -(x^3 \quad + \quad x^2 \quad + \quad 0x \quad + \quad 0) \\ \hline \quad \quad - \quad x^2 \quad + \quad 0x \quad + \quad 1 \\ \quad \quad -(- \quad x^2 \quad - \quad x \quad + \quad 0) \\ \hline \quad \quad \quad \quad + \quad x \quad + \quad 1 \\ \quad \quad \quad \quad -(+ \quad x \quad + \quad 1) \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \quad 0 \end{array} & \left| \begin{array}{r} x \quad + \quad 1 \\ \hline x^2 \quad - \quad x \quad + \quad 1 \end{array} \right. \end{array}$$

Nota: também podíamos utilizar a regra de Ruffini.

Como o discriminante de x^2-x+1 é -3 , temos que o polinómio x^2-x+1 não tem raízes. Sendo assim, $\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}$.

De

$$\begin{aligned} \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} &= \frac{Bx^2+Bx+Cx+C+Ax^2-Ax+A}{(x+1)(x^2-x+1)} = \\ &= \frac{(B+A)x^2+(B+C-A)x+(A+C)}{(x+1)(x^2-x+1)} \end{aligned}$$

obtemos o sistema

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C-A=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ -A+1-A-A=0 \\ C=1-A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{3} \\ A=\frac{1}{3} \\ C=\frac{2}{3} \end{cases}$$

e portanto $\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{(x+1)} + \frac{-x+2}{x^2-x+1} \right)$.

3º Passo: Primitivar todos os termos da soma obtida.

É óbvio que $P \frac{1}{x+1} = \ln|x+1| + K$.

Estudemos $P \frac{-x+2}{x^2-x+1}$. Como $(x^2-x+1)' = 2x-1$, vejamos como fazer “aparecer” esta derivada

no numerador: $P \frac{-x+2}{x^2-x+1} = P - \frac{1}{2} \frac{2x-1-3}{x^2-x+1} = P - \frac{1}{2} \left(\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{x^2-x+1} \right)$.

Ora a primitiva de $\frac{2x-1}{x^2-x+1}$ é um logaritmo neperiano, e

$$\begin{aligned} P \frac{3}{x^2-x+1} &= P \frac{3}{\frac{3}{4} + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = P \frac{4}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right)\right)^2} = \\ &= 2\sqrt{3} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right) \right) + K. \end{aligned}$$

Juntando, vem que

$$\begin{aligned} P \frac{-x+2}{x^2-x+1} &= P - \frac{1}{2} \frac{2x-1-3}{x^2-x+1} = P - \frac{1}{2} \left(\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{x^2-x+1} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\ln(x^2-x+1) - 2\sqrt{3} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right) \right) \right] + K. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} P \frac{1}{x^3+1} &= P \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-x+2}{x^2-x+1} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left[\ln|x+1| - \frac{1}{2} \left[\ln(x^2-x+1) - 2\sqrt{3} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x - \frac{1}{2}\right) \right) \right] \right] + K. \end{aligned}$$

4. Calcule as seguintes primitivas (por substituição):

(a) $P \frac{1}{\sqrt[12]{x^{11}}(\sqrt[6]{x}+1)}$

(c) $P \sqrt{5-3x^2}$

(f) $P \frac{\ln(x)-8}{x(\ln^3(x)-2\ln^2(x)+\ln(x))}$

(b) $P \frac{e^{2x}}{(e^x-1)(e^{2x}+1)}$

(d) $P x \sqrt{1+x}$

(e) $P \sqrt{x-1} \ln(\sqrt{x-1}-3)$

Resolução.

(a) Fazendo a substituição $\sqrt[12]{x} = t \Rightarrow x = t^{12} \Rightarrow \phi'(t) = 12t^{11}$,

$$\begin{aligned} P \frac{x}{\sqrt[12]{x^{11}}(\sqrt[6]{x}+1)} &= P \frac{t^{12}}{t^{11}(t^2+1)} 12t^{11} = 12P \frac{t^{12}}{t^2+1} = \\ &= 12P \left(t^{10} - t^8 + t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1} \right) = \\ &= 12 \left(\frac{t^{11}}{11} - \frac{t^9}{9} + \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \arctan(t) \right) = \\ &= 12 \left(\frac{\sqrt[12]{x^{11}}}{11} - \frac{\sqrt[12]{x^9}}{9} + \frac{\sqrt[12]{x^7}}{7} - \frac{\sqrt[12]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[12]{x^3}}{3} - \sqrt[12]{x} + \arctan \left(\sqrt[12]{x^{11}} \right) \right) + K. \end{aligned}$$

(b) Fazendo a substituição $e^x = t \Rightarrow x = \ln(t) \Rightarrow \phi'(t) = \frac{1}{t}$,

$$P \frac{e^{2x}}{(e^x-1)(e^{2x}+1)} = P \frac{t^2}{(t-1)(t^2+1)} \frac{1}{t} = P \frac{t}{(t-1)(t^2+1)},$$

que é uma primitiva racional. Assim,

$$\frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{At^2 + A + Bt^2 - Bt + Ct - C}{(t-1)(t^2+1)} = \frac{(A+B)t^2 + (C-B)t + (A-C)}{(t-1)(t^2+1)}$$

e obtemos

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-B=1 \\ A-C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ A+A=1 \\ A=C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-\frac{1}{2} \\ A=\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vem então que

$$\begin{aligned} P \frac{t}{(t-1)(t^2+1)} &= \frac{1}{2}P \frac{1}{t-1} - \frac{1}{2}P \frac{t-1}{t^2+1} = \frac{1}{2} \ln|t-1| - \frac{1}{2}P \frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}P \frac{1}{t^2+1} = \\ &= \frac{1}{2} \ln|t-1| - \frac{1}{4} \ln(t^2+1) + \frac{1}{2} \arctan(t) = \\ &= \frac{1}{2} \ln|e^x-1| - \frac{1}{4} \ln(e^{2x}+1) + \frac{1}{2} \arctan(e^x) + K. \end{aligned}$$

(c) Fazendo a substituição $x = \sqrt{\frac{5}{3}} \sin(t) \Rightarrow \phi'(t) = \sqrt{\frac{5}{3}} \cos(t)$,

$$P\sqrt{5-3x^2} = P\sqrt{5-3\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\sin(t)\right)^2} \sqrt{\frac{5}{3}}\cos(t) = P\sqrt{5-5\sin^2(t)}\sqrt{\frac{5}{3}}\cos(t) = \frac{5\sqrt{3}}{3}P\cos^2(t).$$

Fazendo a $P\cos^2(t)$ por partes:

$$\begin{aligned} P\cos^2(t) &= \sin(t)\cos(t) - P\sin(t)(-\sin(t)) = \sin(t)\cos(t) - P(1-\cos^2(t)) = \\ &= \sin(t)\cos(t) + t - P\cos^2(t) \end{aligned}$$

donde

$$P\cos^2(t) = \frac{\sin(t)\cos(t) + t}{2} + K.$$

Logo

$$\begin{aligned} P\sqrt{5-3x^2} &= \frac{5\sqrt{3}}{3}P\cos^2(t) = \frac{5\sqrt{3}}{3} \frac{\sin(t)\cos(t) + t}{2} = \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{3} \frac{\sin\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)\right)\cos\left(\arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)\right) + \arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)}{2} = \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{3} \frac{\sqrt{\frac{3}{5}}x\sqrt{1-\frac{3}{5}x^2} + \arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}x\right)}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{5}x\sqrt{1-\frac{3}{5}x^2}}{2} + \frac{5\sqrt{3}\arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{5}x\right)}{6} = \\ &= \frac{x\sqrt{5-3x^2}}{2} + \frac{5\sqrt{3}\arcsin\left(\frac{\sqrt{15}}{5}x\right)}{6} + K. \end{aligned}$$

(d) Fazendo a substituição $\sqrt{1+x} = t \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow \phi'(t) = 2t$,

$$x\sqrt{1+x} = P(t^2-1)t2t = 2P(t^3-t^2) = \frac{t^4}{2} - \frac{2t^3}{3} = \frac{(1+x)^2}{2} - \frac{2\sqrt{(1+x)^3}}{3} + K.$$

(e) Fazendo a substituição $\sqrt{1+x} = t \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow \phi'(t) = 2t$, vem

$$\begin{aligned} P\sqrt{x-1}\ln(\sqrt{x-1}-3) &= Pt\ln(t-3)2t = 2Pt^2\ln(t-3) = \\ &= \frac{t^3}{3}\ln(t-3) - P\frac{t^3}{3}\frac{1}{t-3} = \frac{t^3}{3}\ln(t-3) - \frac{1}{3}P\frac{t^2}{t-3} = \\ &= \frac{t^3}{3}\ln(t-3) - \frac{1}{3}P\left(t^2 + 3t + 3 + \frac{1}{t-3}\right) = \\ &= \frac{t^3}{3}\ln(t-3) - \frac{1}{3}\left(\frac{t^3}{3} + 3\frac{t^2}{2} + 3t + \ln|t-3|\right) = \\ &= \frac{\sqrt{(1+x)^3}}{3}\ln(\sqrt{1+x}-3) - \frac{\sqrt{(1+x)^3}}{9} - \frac{1+x}{2} - \\ &\quad -\sqrt{1+x} - \frac{1}{3}\ln|\sqrt{1+x}-3| + K. \end{aligned}$$

(f) Fazendo a substituição $\ln x = t \Rightarrow x = e^t \Rightarrow \phi'(t) = e^t$,

$$P\frac{\ln(x)-8}{x(\ln^3(x)-2\ln^2(x)+\ln(x))} = P\frac{t-8}{e^t(t^3-2t^2+t)}e^t = P\frac{t-8}{t(t-1)^2}.$$

Temos que

$$\frac{A}{t} + \frac{B}{t-1} + \frac{C}{(t-1)^2} = \frac{At^2 - 2At + A + Bt^2 - Bt + Ct}{t(t-1)^2} = \frac{(A+B)t^2 + (C-B-2A)t + A}{t(t-1)^2}$$

donde

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-B-2A=1 \\ A=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ c-8-2(-8)=1 \\ A=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=8 \\ C=-7 \\ A=-8 \end{cases}$$

e logo

$$\begin{aligned} P\frac{t-8}{t(t-1)^2} &= P\left(-\frac{8}{t} + \frac{8}{t-1} - \frac{7}{(t-1)^2}\right) = -8\ln|t| + 8\ln|t-1| + \frac{7}{t-1} = \\ &= -8\ln|\ln(x)| + 8\ln|\ln(x)-1| + \frac{7}{\ln(x)-1} + K. \end{aligned}$$

5. Calcule as seguintes primitivas:

(a) $P\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}$

(g) $P\frac{e^{\sqrt{x+3}}}{\sqrt{x+3}}$

(m) Pxe^{-x}

(b) $Pe^{-x}\cos(x)$

(h) $Pe^{\sin(x)}\cos(x)\sin(x)$

(n) $P\tan(3x)\sec^4(3x)$

(c) $P\frac{x}{\sqrt{1-x}}$

(i) $P\frac{\sqrt{3+\ln(x)}}{x}$

(o) $P\frac{1}{2+\cos(x)}$

(d) $Px\arctan(x)$

(j) $P\cos(x)\cot^2(x)$

(p) $P\frac{e^{2x}}{1+e^x}$

(e) $P\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}$

(k) $P\frac{x+\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$

(q) $P\sqrt{e^x-1}$

(f) $P\frac{4x^2+3x+2}{x(x^2+x+1)}$

(l) $P\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

(r) $P\sec(x)$

(s) $P\frac{x}{x^2+6x+10}$

(a) 1º Passo: Divisão dos polinómios.

$$\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} = \frac{x^3+x}{x^3+x} + \frac{1}{x^3+x} = 1 + \frac{1}{x^3+x}.$$

2º Passo: Transformar $\frac{1}{x(x^2+1)}$ numa soma de termos primitiváveis.

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}$$

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ C = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

e logo $\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}$.

3º Passo: Primitivar todos os termos da soma obtida.

$$P \frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)} = P \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 1} \right) = x + \ln|x| + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + K.$$

(b) Por partes, tomando

$$\begin{aligned} g &= e^{-x} & \text{e} & \quad f = \cos(x) \\ g' &= -e^{-x} & \text{e} & \quad Pf = \sin(x) \end{aligned}$$

vem

$$Pe^{-x} \cos(x) = \sin(x)e^{-x} - P \sin(x)(-e^{-x}).$$

Apliquemos agora a fórmula da primitivação por partes a $P \sin(x)e^{-x}$:

$$P \sin(x)e^{-x} = -\cos(x)e^{-x} - P - \cos(x)(-e^{-x}) = -\cos(x)e^{-x} - P \cos(x)e^{-x}.$$

Sendo assim, temos que

$$Pe^{-x} \cos(x) = \sin(x)e^{-x} + \cos(x)e^{-x} + P \cos(x)e^{-x} \Leftrightarrow P \cos(x)e^{-x} = \frac{\sin(x)e^{-x} + \cos(x)e^{-x}}{2} + K.$$

(c) Fazendo a substituição $\sqrt{1+x} = t \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow \phi'(t) = 2t$, vem

$$P \frac{x}{\sqrt{1-x}} = P \frac{t^2 - 1}{t} 2t = 2P(t^2 - 1) = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) = 2 \left(\frac{\sqrt{(1+x)^3}}{3} - \sqrt{1+x} \right) + K.$$

(d) Por partes, fazendo

$$\begin{aligned} g &= \arctan(x) & \text{e} & \quad f = x \\ g' &= \frac{1}{1+x^2} & \text{e} & \quad Pf = \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

vem que

$$\begin{aligned} Px \arctan(x) &= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - P \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} P \frac{x^2}{1+x^2} = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} P \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan(x) - \frac{1}{2} (x - \arctan(x)) + K. \end{aligned}$$

(e) Fazendo a substituição $\sqrt[4]{x-1} = t \Rightarrow x = t^4 + 1 \Rightarrow \phi'(t) = 4t^3$, temos ainda que $\sqrt{x-1} = t^2$, e portanto

$$P \frac{1}{\sqrt{x-1} \sqrt[4]{x-1}} = P \frac{1}{t^3} 4t^3 = P4 = 4t = 4\sqrt[4]{x-1} + K.$$

(f) 2º Passo: Transformar $\frac{4x^2 + 3x + 2}{x(x^2 + x + 1)}$ numa soma de termos primitiváveis.

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} = \frac{Ax^2 + Ax + A + Bx^2 + Cx}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{(A+B)x^2 + (A+C)x + A}{x(x^2 + x + 1)}$$

Temos o sistema

$$\begin{cases} A + B = 4 \\ A + C = 3 \\ A = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 2 \\ C = 1 \\ A = 2 \end{cases}$$

e logo $\frac{4x^2 + 3x + 2}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{2}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}$.

3º Passo: Primitivar todos os termos da soma obtida.

$$P \frac{4x^2 + 3x + 2}{x(x^2 + x + 1)} = P \left(\frac{2}{x} + \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} \right) = 2 \ln |x| + \ln |x^2 + x + 1| + K.$$

(g) Fazendo a substituição $e^{\sqrt{x+3}} = t \Rightarrow x = \ln^2 t - 3 \Rightarrow \phi'(t) = \frac{2 \ln t}{t}$,

$$P \frac{t}{\ln t} \frac{2 \ln t}{t} = P 2 = 2t = 2e^{\sqrt{x+3}} + K.$$

(h) Por partes, fazendo

$$\begin{aligned} g &= \sin(x) & e & f = e^{\sin(x)} \cos(x) \\ g' &= -\cos(x) & e & Pf = e^{\sin(x)} \end{aligned}$$

vem

$$\begin{aligned} P e^{\sin(x)} \cos(x) \sin(x) &= e^{\sin(x)} \sin(x) - P e^{\sin(x)} \cos(x) = e^{\sin(x)} \sin(x) - e^{\sin(x)} = \\ &= e^{\sin(x)} (\sin(x) - 1) + K. \end{aligned}$$

(i) $P \frac{\sqrt{3 + \ln(x)}}{x} = P \frac{1}{x} \sqrt{3 + \ln(x)} = \frac{2}{3} (3 + \ln(x))^{\frac{3}{2}} + K.$

(j) $P \cos(x) \cot^2(x) = P \cos(x) (\cot^2(x) + 1 - 1) = P \cos(x) \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - 1 \right) = P \frac{\cos(x)}{\sin^2(x) - \cos(x)} =$
 $= -\frac{1}{\sin(x)} - \sin(x) + K.$

(k) Façamos a mudança de variável $\sqrt[6]{x+1} = t$. Temos que $x = t^6 - 1 \Rightarrow \phi'(t) = 6t^5$. Além disso, $\sqrt{x+1} = t^3$ e $\sqrt[3]{x+1} = t^2$.

$$\begin{aligned} P \frac{x + \sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}} &= P \frac{t^6 - 1 + t^3}{t^2} 6t^5 = 6P(t^9 - t^3 + t^6) = 6 \left(\frac{1}{10} t^{10} - \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{7} t^7 \right) = \\ &= 6 \left(\frac{1}{10} (x+1)^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{4} (x+1)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{7} (x+1)^{\frac{7}{6}} \right) = \\ &= \frac{6}{10} (x+1)^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2} (x+1)^{\frac{2}{3}} + \frac{6}{7} (x+1)^{\frac{7}{6}} = \\ &= \frac{42(x+1)^{\frac{5}{3}} - 105(x+1)^{\frac{2}{3}} + 60(x+1)^{\frac{7}{6}}}{70} = \\ &= \frac{3(x+1)^{\frac{2}{3}} [14(x+1) - 35 + 20(x+1)^{\frac{1}{2}}]}{70} = \\ &= \frac{3(x+1)^{\frac{2}{3}} [14x - 21 + 20(x+1)^{\frac{1}{2}}]}{70} + K. \end{aligned}$$

(l) Façamos a mudança de variável $e^{2x} = t$. Temos que $x = \frac{1}{2} \ln(t) \Rightarrow \phi'(t) = \frac{1}{2t}$.

$$\begin{aligned} P \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} &= P \frac{t - 1}{t + 1} \frac{1}{2t} = \frac{1}{2} P \frac{t - 1}{t(t+1)} = \frac{1}{2} P \left(\frac{2}{t+1} - \frac{1}{t} \right) = \\ &= \ln |t+1| - \frac{1}{2} \ln |t| = \ln(e^{2x} + 1) - \frac{1}{2} \ln(e^{2x}) = \ln(e^{2x} + 1) - x + K. \end{aligned}$$

(m) Por partes, fazendo

$$\begin{aligned}g &= x & e &= e^{-x} \\g' &= 1 & e &= Pf = -e^{-x}\end{aligned}$$

obtemos

$$Pxe^{-x} = -e^{-x}x - P - e^{-x} = -e^{-x}x - e^{-x} = e^{-x}(x - 1) + K.$$

$$(n) P \tan(3x) \sec^4(3x) = \frac{1}{3} P 3 \tan(3x) \sec(3x) \sec^3(3x) = \frac{1}{12} \sec^4(3x) + K$$

(o) Fazemos a mudança de variável $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t$. Temos que $x = 2 \arctan(t) \Rightarrow \phi'(t) = \frac{2}{1+t^2}$ e $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned}P \frac{1}{2 + \cos(x)} &= P \frac{\frac{2}{1+t^2}}{2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = P \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{3+t^2}{1+t^2}} = P \frac{2}{3+t^2} = P \frac{\frac{2}{3}}{1 + \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} = \\&= \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) + K.\end{aligned}$$

(p) Fazendo a mudança de variável $e^x = t$, temos que $x = \ln(t) \Rightarrow \phi'(t) = \frac{1}{t}$. Além disso, $e^{2x} = t^2$.

$$P \frac{e^{2x}}{1 + e^x} = P \frac{t^2}{1 + t} \frac{1}{t} = P \frac{t}{1 + t} = P \left(1 - \frac{1}{1 + t}\right) = t - \ln|t + 1| = e^x - \ln(e^x + 1) + K.$$

(q) Fazemos a mudança de variável $\sqrt{e^x - 1} = t$. Então $x = \ln(t^2 + 1) \Rightarrow \phi'(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}$ e logo

$$P\sqrt{e^x - 1} = 2P \frac{t^2}{t^2 + 1} = 2P \left(1 - \frac{1}{t^2 + 1}\right) = 2t - 2 \arctan(t) = 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \arctan(\sqrt{e^x - 1}) + K.$$

$$(r) P \sec(x) = P \sec(x) \frac{\tan(x) + \sec(x)}{\tan(x) + \sec(x)} = P \frac{\sec(x) \tan(x) + \sec^2(x)}{\tan(x) + \sec(x)} = \ln|\tan(x) + \sec(x)| + K.$$

$$(s) P \frac{x}{x^2 + 6x + 10} = P \frac{1}{2} \left(\frac{2x + 6}{x^2 + 6x + 10} - \frac{6}{x^2 + 6x + 10} \right) = \frac{1}{2} (\ln|x^2 + 6x + 10| - 6 \arctan(x + 3)) + K.$$