Resolução da Ficha 4

1. Calcule o valor médio de cada uma das seguintes funções, e interprete geometricamente o resultado.

   (a) $f(x) = \sin^2(x)$ no intervalo $[0, \pi]$;

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ no intervalo $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

   Resolução. Como as funções em causa são contínuas no seu domínio, estão nas condições do Teorema do Valor Médio.

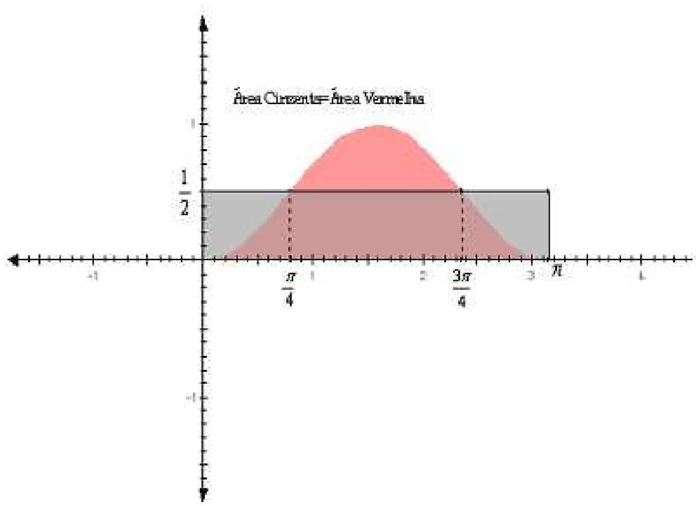
   (a) O valor médio da função f no intervalo $[0, \pi]$ é $f(c)$ correspondente a certo $c \in [0, \pi]$, tal que $f(c)(\pi - 0) = \displaystyle\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x$. Como

$$\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}(2x - \sin(2x))\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2},$$

então $f(c) = \dfrac{1}{2}$, que é o valor médio pretendido.
Se, por curiosidade, quisermos determinar valores de c, objecto(s) associados a esse valor médio, basta resolver

$$\sin^2(c) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin(c) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow c = \frac{\pi}{4} \vee c = \frac{3\pi}{4}.$$

Há dois objectos nas condições requeridas.



A área do plano limitado pela função $f(x) = \sin^2(x)$ e pelas rectas $x = 0$, $x = \pi$ e o eixo Ox é igual à área do rectângulo cuja base mede $(\pi - 0)$ e a altura $\dfrac{1}{2}$.

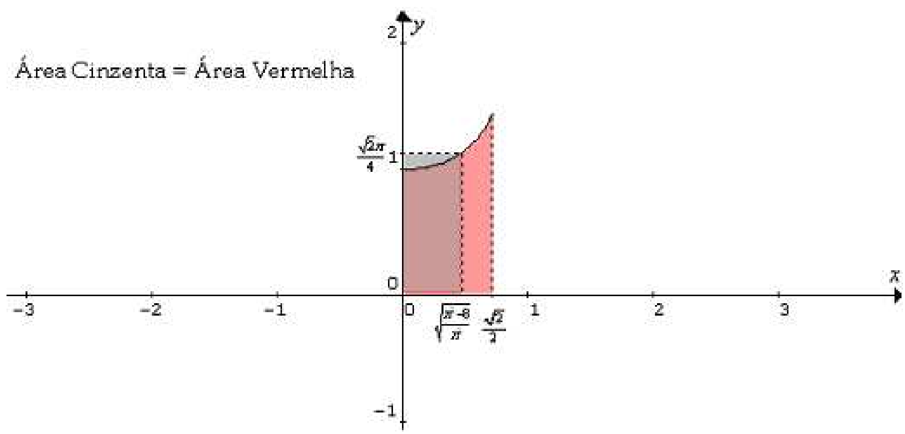
(b) O valor médio da função f no intervalo $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ é $f(c)$ correspondente a certo $c \in \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, tal que $f(c)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x)\,\mathrm{d}x$. Como

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = [\arcsin(x)]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\pi}{4},$$

então $f(c) = \frac{\pi}{4} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$, que é o valor médio pretendido.

Se, por curiosidade, quisermos determinar valores de c, objecto(s) associados a esse valor médio, basta resolver

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1-c^2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{4}{\sqrt{2}\pi} = \sqrt{1-c^2} \\ &\Rightarrow \quad \frac{16}{2\pi^2} = 1 - c^2 \\ &\Leftrightarrow \quad c^2 = 1 - \frac{8}{\pi^2} \\ &\Leftrightarrow \quad c^2 = \frac{\pi^2 - 8}{\pi^2} \\ &\Leftrightarrow \quad c^2 = \sqrt{\frac{\pi^2-8}{\pi^2}}. \end{aligned}$$



A interpretação geométrica é análoga à da alínea anterior.

2. Calcule o valor médio da função $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$. Mostre que existe $y \in]0, 2\pi[$ tal que $f(y) = \frac{1}{4\pi}(1 - \mathrm{e}^{-2\pi})$. Justifique.

Resolução. Como a função dada é contínua no seu domínio, está nas condições do Teorema do Valor Médio.

O valor médio da função f no intervalo $[0, 2\pi]$ é $f(c)$ correspondente a certo $c \in [0, 2\pi]$, tal que $f(c)(2\pi - 0) = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$. Tem-se

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-x}\sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-x}(\sin(x)+\cos(x))}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}{2}$$

(a primitiva $P\mathrm{e}^{-x}\sin(x)$ obtém-se facilmente aplicando duas vezes a fórmula da primitivação por partes). Sendo assim, $f(c) = \frac{1-\mathrm{e}^{-2\pi}}{4\pi}$, que é o valor médio pretendido.

A justificação da existência de c é uma mera consequência do Teorema do Valor Médio, dada a continuidade de $f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$ em $[0, 2\pi]$.

3. Calcule:

   (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{4x^2+3x+2}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x.$

   (b) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\sqrt{3+\ln(x^2)}}{x}\,\mathrm{d}x.$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x.$

   Resolução.

   (a) Recordando o Exercício 5.(f) da Ficha 3:

$$P\frac{4x^2+3x+2}{x(x^2+x+1)} = P\left(\frac{2}{x} + \frac{2x+1}{x^2+x+1}\right) = 2\ln|x| + \ln|x^2+x+1| + K,$$

   e logo

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{4x^2+3x+2}{x(x^2+x+1)}\,\mathrm{d}x &= \left[2\ln|x| + \ln|x^2+x+1|\right]_1^2 = 2\ln(2) + \ln(7) - 2\ln(1) - \ln(3) = \\ &= 2\ln(2) + \ln\left(\frac{7}{3}\right) = \ln(4) + \ln\left(\frac{7}{3}\right) = \ln\left(\frac{28}{3}\right).\end{aligned}$$

   (b) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\sqrt{3+\ln(x^2)}}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\frac{2}{3}(3+\ln(x^2))^{\frac{3}{2}}\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = \frac{1}{3}(\sqrt{7^3} - \sqrt{5^3}).$

   (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{t^2}{1+t}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} 1 - \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = [t - \ln(1+t)]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e} - \ln(1+\mathrm{e}) - 1 + \ln(2) =$ $\displaystyle\mathrm{e} - 1 + \ln\left(\frac{2}{1+\mathrm{e}}\right).$

4. Determine a função $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, não nula e diferenciável, que verifica a condição

$$[f(x)]^2 = \int_0^{x^2} \frac{\sqrt{t}}{2+t} f(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t.$$

   Resolução. Derivando em ordem a x,

$$\begin{aligned}2f(x)f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2} \frac{\sqrt{t}}{2+t} f(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t \quad &\Leftrightarrow \quad 2f(x)f'(x) = \frac{x}{2+x^2} f(x) 2x \\ &\Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{x^2}{2+x^2}\end{aligned}$$

   Nota: Este último corte é correcto, uma vez que f é não nula.

   Primitivemos $\dfrac{x^2}{2+x^2}$:

$$P\frac{x^2}{2+x^2} = P\left(1 - \frac{2}{2+x^2}\right) = P\left(1 - \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)^2}\right) = x - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right) + K.$$

Para calcular o valor de K, basta ver que $[f(0)]^2 = \int_0^0 \frac{\sqrt{t}}{2+t} f(\sqrt{t})\, \mathrm{d}t = 0$. Sendo assim,

$$0 - \sqrt{2}\arctan(\frac{\sqrt{2}\times 0}{2}) + K = 0 \Leftrightarrow K = 0,$$

e a função pretendida é $f(x) = x - \sqrt{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}x}{2}\right)$.

5. Considere a função definida por $F(x) = \int_{\arctan(x)}^{\ln(1+x^2)} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t$. Calcule, justificando, $F'(x)$.

Resolução. $F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{\arctan(x)}^{\ln(1+x^2)} \frac{\sin(t)}{t}\, \mathrm{d}t = \frac{\sin(\ln(1+x^2))}{\ln(1+x^2)} \frac{2x}{1+x^2} - \frac{\sin(\arctan(x))}{\arctan(x)} \frac{1}{1+x^2}$.

Nota: Usando um pouco de trigonometria, pode-se chegar à expressão

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad &\Rightarrow \quad \tan^2(x) + 1 = \frac{1}{1-\sin^2(x)} \\
&\Rightarrow \quad 1 - \sin^2(x) = \frac{1}{\tan^2(x)+1} \\
&\Rightarrow \quad \sin^2(x) = 1 - \frac{1}{\tan^2(x)+1} \\
&\Rightarrow \quad \sin(x) = \sqrt{1 - \frac{1}{\tan^2(x)+1}}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, $\sin(\arctan(x)) = \sqrt{1 - \frac{1}{\tan^2(\arctan(x))+1}} = \sqrt{1 - \frac{1}{x^2+1}} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \frac{\sin(\ln(1+x^2))}{\ln(1+x^2)} \frac{2x}{1+x^2} - \frac{\sin(\arctan(x))}{\arctan(x)} \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{\sin(\ln(1+x^2))}{\ln(1+x^2)} \frac{2x}{1+x^2} - \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\arctan(x)} \frac{1}{1+x^2} \\
&= \frac{\sin(\ln(1+x^2))}{\ln(1+x^2)} \frac{2x}{1+x^2} - \frac{x}{\arctan(x)(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

6. Determine a equação da recta tangente ao gráfico de $f(x) = \int_1^{1+x^2} \frac{1+t}{t}\, \mathrm{d}t$ no ponto $x = -1$.

Resolução. Temos que $f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_1^{1+x^2} \frac{1+t}{t}\, \mathrm{d}t = \frac{1+1+x^2}{1+x^2} 2x = \frac{4x+2x^3}{1+x^2}$, e portanto $f'(-1) = \frac{4(-1)+2(-1)^3}{1+(-1)^2} = -3$.

Como $f(-1) = \int_1^2 \frac{1+t}{t}\, \mathrm{d}t = [t + \ln t]_1^2 = (2\ln(2) - 1 - 0) = 1 + \ln(2)$, a equação da recta tangente é $y = -3(x+1) + 1 + 1\ln(2)$.

7. Considere as funções $F(x) = \int_1^x \ln(t^2)\, \mathrm{d}t$ e $G(x) = \int_1^{x^4} \ln(\sqrt{t})\, \mathrm{d}t$. Mostre que

$$F'(x) + G'(x) = F'(x)(1 + 4x^3).$$

Resolução. $F'(x)+G'(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_1^x \ln(t^2)\,\mathrm{d}t + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_1^{x^4} \ln(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t = \ln(x^2)+\ln(x^2)4x^3 = F'(x)(1+4x^3)$.

8. Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\sin^2(t)t^2\,\mathrm{d}t}{x^3}$.

   Resolução.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_{x^2}^{x^3}\sin^2(t)t^2\,\mathrm{d}t}{x^3} \underset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x^3)x^6 3x^2 - \sin^2(x^2)x^4 2x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\sin^2(x^3)x^6 - \sin^2(x^2)x^3\frac{2}{3}\right) = 0.$$

9. Calcule:

   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(3x)\sec^4(3x)\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+7}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\arctan(2x)}}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$

   (e) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

   Resolução.

   (a) Como $Px\mathrm{e}^{-x} = -x\mathrm{e}^{-x} - P - \mathrm{e}^{-x} = -x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x} = -\mathrm{e}^{-x}(x+1)+K$,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{c\to+\infty}\int_0^c x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to+\infty}[-\mathrm{e}^{-x}(x+1)]_0^c = \\ &= \lim_{c\to+\infty}\left(-\mathrm{e}^{-c}(c+1)-(-1)\right) = \lim_{c\to+\infty}(-\mathrm{e}^{-c}(c+1)+1)) = 1.\end{aligned}$$

   (b) Recordando o Exercício 5.(n) da Ficha 3,

$$P\tan(3x)\sec^4(3x) = \frac{1}{3}P3\tan(3x)\sec(3x)\sec^3(3x) = \frac{1}{12}\sec^4(3x)+K.$$

   Então

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(3x)\sec^4(3x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{c\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^c \tan(3x)\sec^4(3x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \lim_{c\to\frac{\pi}{2}^-}\left[\frac{1}{12}\sec^4(3x)\right]_0^c = \\ &= \lim_{c\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{12}\sec^4(3c)-\frac{1}{12}\right) = +\infty.\end{aligned}$$

(c) Temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+7}\,\mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{x^2+2x+7}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+7}\,\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{0} \frac{1}{x^2+2x+7}\,\mathrm{d}x + \lim_{d\to+\infty}\int_{0}^{d} \frac{1}{x^2+2x+7}\,\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{c\to-\infty}\left[\frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{6}(x+1)}{6}\right)\right]_c^0 + \lim_{d\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{\sqrt{6}(x+1)}{6}\right)\right]_0^d = \\
&= \lim_{c\to-\infty}\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{6}(c+1)}{6}\right)\right) + \\
&\quad + \lim_{d\to+\infty}\frac{\sqrt{6}}{6}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{6}(d+1)}{6}\right) - \arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right) = \\
&= \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right) + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sqrt{6}}{6}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{6}\pi}{6}.
\end{aligned}$$

(d) Temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{\arctan(2x)}}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{c\to+\infty}\int_0^c \frac{\sqrt{\arctan(2x)}}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \\
&= \lim_{c\to+\infty}\left[\frac{1}{3}\arctan^{\frac{3}{2}}(2x)\right]_0^c = \\
&= \lim_{c\to+\infty}\frac{1}{3}\arctan^{\frac{3}{2}}(2c) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\pi^3}{8}}.
\end{aligned}$$

(e) Como $P\frac{\ln(x)}{x^2} = -\frac{1}{x}\ln(x) - P - \frac{1}{x}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x}\ln(x) - \frac{1}{x}$, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{c\to+\infty}\int_{\mathrm{e}}^{c}\frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\ln(x) - \frac{1}{x}\right] = \\
&= \lim_{c\to+\infty}\left(-\frac{1}{c}\ln(c) - \frac{1}{c} + \frac{1}{\mathrm{e}}\ln(\mathrm{e}) + \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{2}{\mathrm{e}}.
\end{aligned}$$

10. Calcule a área da região limitada por:

(a) $y = \cos(x)$, $y = \sin(x)$, $x = \frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$;

(b) $y^2 = 2 - x$ e $y = x$;

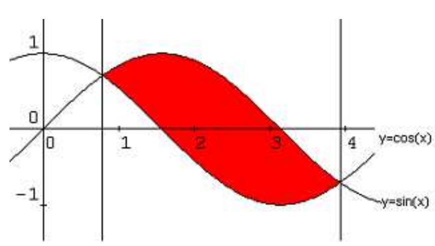
(c) $y = \mathrm{e}^x$, $y = (x-1)^2$ e $x = 1$;

(d) $y = -x^2 + 4$ e $y = (x-2)^2$;

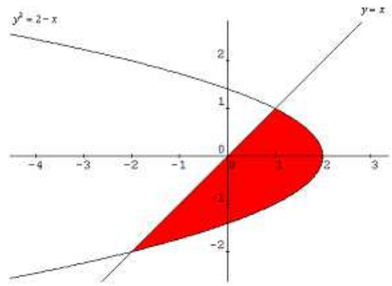
(e) $y = 3^{-2x}$, $y = \sqrt{1-x^2}$ e $x = -1$.

Resolução.

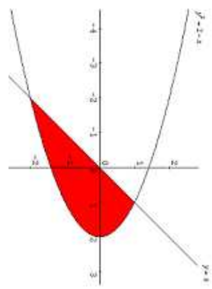
(a) $A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin(x) - \cos(x))\,\mathrm{d}x = \big[-\cos(x) - \sin(x)\big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}.$

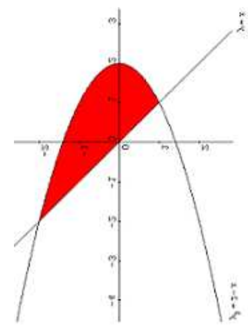


(b) Queremos calcular a área da seguinte região:



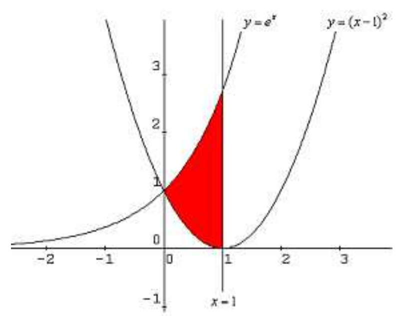
Encaremos a figura segundo "outra perspectiva". Comecemos por uma rotação de 90°, e façamos uma reflexão em torno do eixo dos xx:



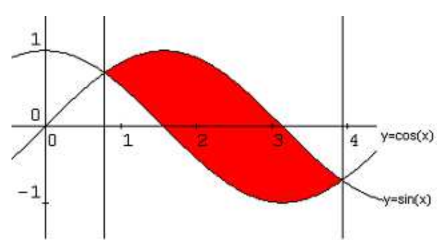


Então $A = \displaystyle\int_{-2}^{1} (2 - y^2 - y)\,\mathrm{d}y = \left[2y - \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2}\right]_{-2}^{1} = 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - (-4) - \frac{8}{3} + 2 = \frac{48}{6} - \frac{2}{6} - \frac{3}{6} - \frac{16}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$.

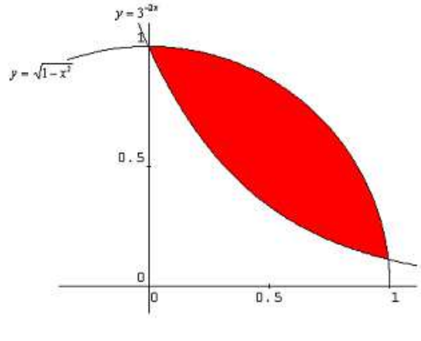
(c) $A = \displaystyle\int_{0}^{1} (\mathrm{e}^x - (x-1)^2)\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x - \frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^1 = \mathrm{e} - 0 - \left(1 - \frac{-1}{3}\right) = \mathrm{e} - \frac{2}{3}$.



(d) $A = \displaystyle\int_0^2 (-x^2 + 4 - (x-2)^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 -x^2 + 4 - x^2 + 4x - 4\,\mathrm{d}x = \int_0^2 -2x^2 + 4x\,\mathrm{d}x = \left[-2\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = -\frac{16}{3} + 8 = \frac{8}{3}$.



(e) $A = \displaystyle\int_0^1 (\sqrt{1-x^2} - \mathrm{e}^{-2x})\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\arcsin(x)}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2\mathrm{e}^2} - \frac{1}{2}$.



$y = 3^{-2x}$
$y = \sqrt{1-x^2}$
1
0.5
0
0
0.5
1