Aula 25

Recordar. Chama-se função racional a uma função da forma $\dfrac{n(x)}{d(x)}$ onde $n(x)$ e $d(x)$ são polinómios.

Propriedade. Seja $f(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$ uma função racional. Se o grau de $n(x)$ é maior ou igual do que o grau de $d(x)$, então $f(x)$ pode ser escrita na forma

$$f(x) = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)},$$

com grau de $r(x)$ menor do que grau de $d(x)$.

Primitivação de funções racionais. Seja $\dfrac{r(x)}{d(x)}$ uma função racional, com grau de $r(x)$ menor do que grau de $d(x)$, e seja

$$d(x) = a(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$$

a decomposição de $d(x)$ em factores (onde a representa o coeficiente do termo de maior grau e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ são as raízes, reais ou complexas, de $d(x)$). Vamos decompor a função racional numa soma de fracções, de acordo com o tipo das raízes de $d(x)$.

1° caso: Se $d(x)$ só tem raízes reais simples $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, então

$$\frac{r(x)}{d(x)} = \frac{1}{a}\left(\frac{A_1}{x-\alpha_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}\right),$$

onde $A_1, \ldots, A_n$ são constantes;

2° caso: Se $d(x)$ tem uma raíz real α com multiplicidade k, então as fracções correspondentes a α na decomposição de $\dfrac{r(x)}{d(x)}$ são

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \cdots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k},$$

onde $A_1, \ldots, A_k$ são constantes;

3° caso: Se $d(x)$ tem as raízes complexas $a \pm bi$ com multiplicidade k, então as fracções correspondentes a estas raízes na decomposição de $\dfrac{r(x)}{d(x)}$ são

$$\frac{A_1 + B_1 x}{(x-a)^2 + b^2} + \cdots + \frac{A_k + B_k x}{((x-a)^2 + b^2)^k},$$

onde $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_k$ são constantes.

Em cada um dos casos, as constantes podem ser obtidas utilizando o método dos coeficientes indeterminados.

Exemplo 25.1.

1. Vamos calcular $P\dfrac{3x+6}{x(x-1)(x+3)}$.

   Como $x(x-1)(x+3)$ só tem raízes reais simples, podemos decompor a fracção racional numa soma de fracções do seguinte modo:
$$\frac{3x+6}{x(x-1)(x+3)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+3}.$$
   Então
$$\begin{aligned} 3x+6 &= A_1(x-1)(x+3) + A_2 x(x+3) + A_3 x(x-1) \\ &= A_1(x^2+2x-3) + A_2(x^2+3x) + A_3(x^2-x), \end{aligned}$$
   e obtemos o sistema
$$\begin{cases} 0 = A_1 + A_2 + A_3 \\ 3 = 2A_1 + 3A_2 - A_3 \\ 6 = -3A_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -2 \\ A_2 = \dfrac{9}{4} \\ A_3 = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$$
   Assim,
$$\begin{aligned} P\frac{3x+6}{x(x-1)(x+3)} &= P\left(-\frac{2}{x} + \frac{\frac{9}{4}}{x-1} - \frac{\frac{1}{4}}{x+3}\right) \\ &= -2\ln|x| + \frac{9}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+3| + k. \end{aligned}$$

2. Vamos calcular $P\dfrac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2}$.

   Como $(x-1)(x+1)^2$ tem uma raíz real simples e uma raíz real de multiplicidade 2, podemos decompor a fracção racional numa soma de fracções do seguinte modo:
$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{(x+1)^2}.$$
   Então
$$\begin{aligned} x^2+2x+3 &= A_1(x+1)^2 + A_2(x-1)(x+1) + A_3(x-1) \\ &= A_1(x^2+2x+1) + A_2(x^2-1) + A_3(x-1), \end{aligned}$$
   e obtemos o sistema
$$\begin{cases} 1 = A_1 + A_2 \\ 2 = 2A_1 + A_3 \\ 3 = A_1 - A_2 - A_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \dfrac{3}{2} \\ A_2 = -\dfrac{1}{2} \\ A_3 = -1 \end{cases}$$
   Assim,
$$\begin{aligned} \frac{x^2+2x+3}{(x-1)(x+1)^2} &= P\left(\frac{\frac{3}{2}}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right) \\ &= \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + k. \end{aligned}$$

3. Vamos calcular $P\dfrac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2)^2}$.

Como $(x-1)(x^2+2)^2$ tem uma raíz real simples e duas raízes complexas de multiplicidade 2, podemos decompor a fracção racional numa soma de fracções do seguinte modo:

$$\frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2+B_2x}{x^2+2} + \frac{A_3+B_3x}{(x^2+2)^2}.$$

Então

$$\begin{aligned}
&x^4-x^3+2x^2-x+2 = \\
&= A_1(x^2+2)^2 + (A_2+B_2x)(x-1)(x^2+2) + (A_3+B_3x)(x-1) \\
&= A_1(x^4+4x^2+4) + (A_2+B_2x)(x^3-x^2+2x-2) + (A_3+B_3x)(x-1),
\end{aligned}$$

e obtemos o sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 1 = A_1+B_2 \\ -1 = A_2-B_2 \\ 2 = 4A_1-A_2+2B_2+B_3 \\ -1 = 2A_2-2B_2+A_3-B_3 \\ 2 = 4A_1-2A_2-A_3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A_1 = \frac{1}{3} \\ A_2 = -\frac{1}{3} \\ B_2 = \frac{2}{3} \\ A_3 = 0 \\ B_3 = -1 \end{array}\right.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&P\frac{x^4-x^3+2x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2)^2} = \\
&= P\left(\frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x}{x^2+2} - \frac{x}{(x^2+2)^2}\right) \\
&= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}P\frac{1}{x^2+2} + \frac{2}{3}P\frac{x}{x^2+2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2} \\
&= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\frac{1}{2}\sqrt{2}P\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2+1} + \frac{1}{3}\ln(x^2+2) + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2} \\
&= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{\sqrt{2}}{6}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{3}\ln(x^2+2) + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+2} + k
\end{aligned}$$