

Aula 33

Definição 33.1.

1. Seja f uma função definida e integrável em qualquer intervalo da forma $[a, c]$. Chama-se integral impróprio de 1ª espécie a um integral da forma $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. Este integral diz-se convergente se existir e for finito o limite

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_a^c f(x) dx.$$

2. Seja f uma função definida e integrável em qualquer intervalo da forma $[c, b]$. Chama-se integral impróprio de 1ª espécie a um integral da forma $\int_{-\infty}^b f(x) dx$. Este integral diz-se convergente se existir e for finito o limite

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^b f(x) dx.$$

Exemplo 33.2.

$$\int_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{n=1}^c \frac{1}{x^3} dx = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_{n=1}^c = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2c^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

Definição 33.3.

1. Seja f uma função definida e integrável em qualquer intervalo da forma $[a, c]$, com $c < b$, tal que $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \infty$. Chama-se integral impróprio de 2ª espécie a um integral da forma

$\int_a^b f(x) dx$. Este integral diz-se convergente se existir e for finito o limite

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx.$$

2. Seja f uma função definida e integrável em qualquer intervalo da forma $[c, b]$, com $a < c$, tal que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$. Chama-se integral impróprio de 2ª espécie a um integral da forma

$\int_a^b f(x) dx$. Este integral diz-se convergente se existir e for finito o limite

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx.$$

Exemplo 33.4.

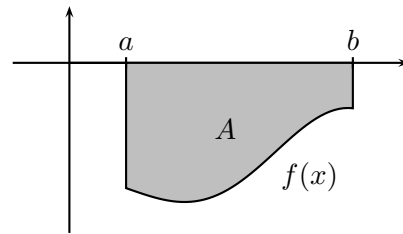
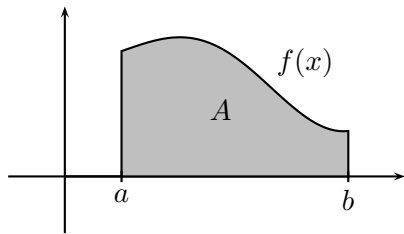
$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x dx &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \ln x dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} [x \ln x - x]_c^1 \\ &= \lim_{c \rightarrow 0^+} (-1 - c \ln c + c) = -1 - \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{\ln c - 1}{\frac{1}{c}} \\ &= -1 - \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{c^2}} = -1 \end{aligned}$$

Aula 34

Cálculo de áreas de figuras planas.

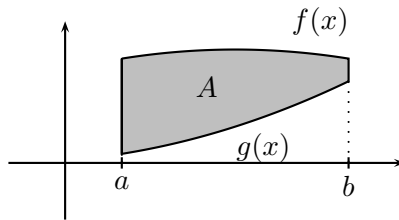
1. A área limitada por $f(x)$, pelas rectas $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo dos xx é dada por:

(a) $A = \int_a^b f(x) dx$, se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$; (b) $A = \int_b^a f(x) dx$, se $f(x) \leq 0$ em $[a, b]$.



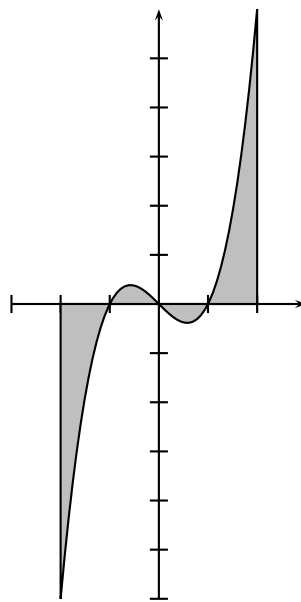
2. A área limitada por $f(x)$, por $g(x)$ e pelas rectas $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$



Exemplo 34.1.

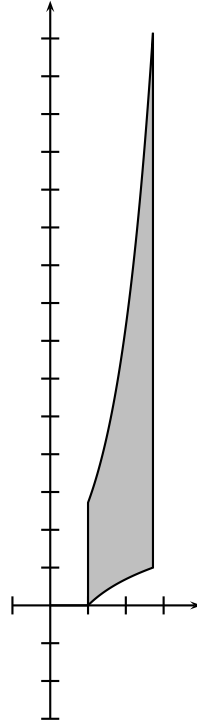
1. Vamos calcular a área limitada por $f(x) = x^3 - x$, pelas rectas $x = -2$ e $x = 2$ e pelo eixo dos xx .



Como $f(x)$ muda de sinal em $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$, a área é dada por

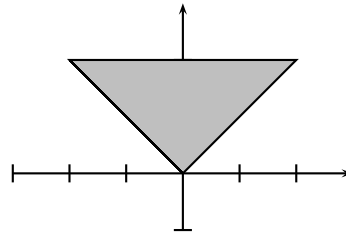
$$\begin{aligned}
 A &= -\int_{-2}^{-1} (x^3 - x) dx + \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx - \int_0^1 (x^3 - x) dx + \int_{n=1}^2 (x^3 - x) dx \\
 &= -\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{n=1}^2 \\
 &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 4 - 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 4 - 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\
 &= 5.
 \end{aligned}$$

2. A área limitada por $y = e^x$, $y = \ln x$ e pelas rectas $x = 1$ e $x = e$ é dada por



$$A = \int_{n=1}^e (e^x - \ln x) dx = [e^x - x \ln x + x]_{n=1}^e = e^e - e + e - e + 0 - 1 = e^e - e - 1.$$

3. A área limitada por $y = |x|$ e pela recta $y = 2$ é:



$$A = \int_0^2 (y + y) dy = [y^2]_0^2 = 4.$$

Aula 35

Cálculo de volumes de sólidos de revolução. Um sólido de revolução é um sólido obtido pela rotação de uma região plana em torno de um eixo.

1. O volume do sólido de revolução obtido pela rotação da região

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x) \wedge a \leq x \leq b\}$$

(a) em torno do eixo dos xx é $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$;

(b) em torno do eixo dos yy é $V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$.

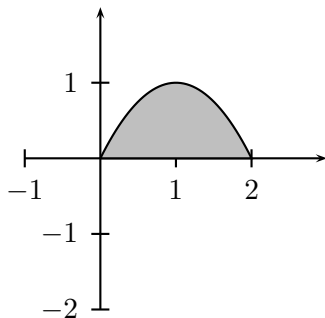
2. O volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo dos xx de

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq f(x) \leq y \leq g(x) \wedge a \leq x \leq b\}$$

é $V = \pi \int_a^b (g^2(x) - f^2(x)) dx$.

Exemplo 35.1.

1. O volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo dos xx da área limitada por $y = 2x - x^2$ e por $y = 0$ é

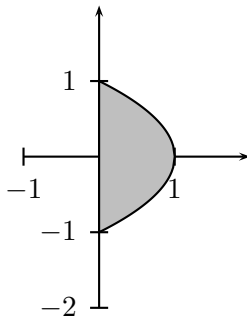


$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 - 4x^3 + 4x^2 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{16\pi}{15}.$$

O volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo dos yy da mesma área é

$$V = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2) dx = 2\pi \int_0^2 (2x^2 - x^3) dx = 2\pi \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{8\pi}{3}.$$

2. O volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo dos xx da área limitada por $1 - y^2 = x$ e por $x = 0$ é

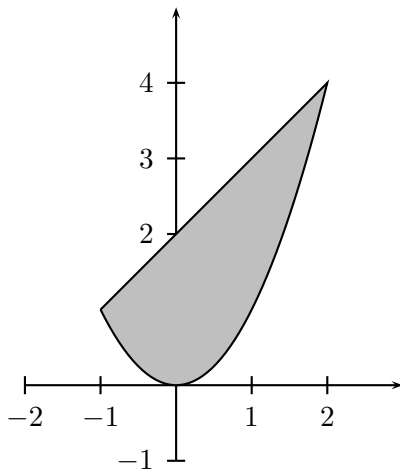


$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{1-x})^2 dx = \pi \int_0^1 1-x dx = \pi \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

O volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo dos yy da mesma área é

$$V = \pi \int_{-1}^1 (1-y^2)^2 dy = \pi \int_{-1}^1 (1-2y^2+y^4) dy = \pi \left[y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_{-1}^1 = \frac{16\pi}{15}.$$

3. O volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo dos xx da área limitada por $y = x^2$ e por $y = x + 2$ é



$$V = \pi \int_{-1}^2 ((x+2)^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{(x+2)^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^2 = \frac{72\pi}{5}.$$