Aula 38

Definição 38.1. Chama-se sucessão (em $\mathbb{R}$) a qualquer aplicação $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ que a cada $n \in \mathbb{N}$ associa um elemento $x(n) \in \mathbb{R}$. Denotamos por x_n o elemento $x(n)$ (termo de ordem n).

Definição 38.2. A sucessão x_n diz-se limitada se o conjunto dos seus termos $\{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado.

Definição 38.3. Seja x_n uma sucessão e $a \in \mathbb{R}$. Diz-se que x_n converge (ou tende) para a quando

$$\forall\, \delta > 0\ \exists\, p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow |x_n - a| < \delta,$$

e escreve-se $x_n \to a$ ou $\lim x_n = a$.

Teorema 38.4 (Teorema das sucessões enquadradas)**.** *Se x_n, y_n, z_n são sucessões tais que*

$$x_n \leq z_n \leq y_n$$

para $n \geq p$ e $\lim x_n = \lim y_n = a$*, então* $\lim z_n = a$*.*

Propriedade. Toda a sucessão convergente é limitada.

Recordar. A sucessão x_n diz-se crescente se $x_{n+1} \geq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, e diz-se decrescente se $x_{n+1} \leq x_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Propriedade. Toda a sucessão monótona limitada é convergente.

Propriedade. Se $x_n \to a$ e $y_n \to b$, então:

1. $x_n + y_n \to a + b$;
2. $x_n \cdot y_n \to ab$;
3. $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{a}{b}$, se $b \neq 0$ e $y_n \neq 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Propriedade. Se x_n é limitada e $y_n \to 0$, então $x_n \cdot y_n \to 0$.

Definição 38.5. Seja x_n uma sucessão. Diz-se que x_n tende para $+\infty$ quando

$$\forall\, L > 0\ \exists\, p \in \mathbb{N} : n \geq p \Rightarrow x_n > L,$$

e escreve-se $x_n \to +\infty$ ou $\lim x_n = +\infty$. Diz-se que $x_n \to -\infty$ quando $-x_n \to +\infty$.

Propriedade. Sejam x_n e y_n sucessões. Então:

1. se $a > 1$, então $a^n \to +\infty$;
2. se $x_n \to 0$, então $\dfrac{1}{x_n} \to \infty$;
3. se $x_n \to \infty$, então $\dfrac{1}{x_n} \to 0$;
4. se $x_n \leq y_n$ para $n \geq p$ e $x_n \to +\infty$, então $y_n \to +\infty$;
5. se $x_n \to \infty$ e y_n é limitada, então $x_n + y_n \to \infty$.

Aula 39

Definição 39.1. Seja a_n uma sucessão. Chama-se série de termo geral a_n a uma expressão da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Exemplo 39.2.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 1 = 1+1+1+\cdots;$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1-1+1-\cdots;$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+\cdots;$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots$ (série harmónica);
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots;$
6. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots.$

Definição 39.3. Seja a_n uma sucessão. Diz-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se existe e é finito o limite $\lim S_n$, onde $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$ é a sucessão das somas parciais de a_n. Neste caso ao limite $\lim S_n$ dá-se o nome de soma da série, e escreve-se

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim S_n.$$

Se o limite $\lim S_n$ não existe ou é infinito, a série diz-se divergente.

Exemplo 39.4.

1. Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} 1$. Então

$$\begin{array}{rcl} S_1 &=& 1 \\ S_2 &=& 1+1=2 \\ S_3 &=& 1+1+1=3 \\ \vdots && \\ S_n &=& n. \end{array}$$

Como $\lim S_n = +\infty$, a série é divergente.

2. Consideremos a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$. Então

$$\begin{array}{rcl} S_0 &=& 1 \\ S_1 &=& 1-1=0 \\ S_2 &=& 1-1+1=1 \\ \vdots && \\ S_n &=& \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ par} \\ 1 & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}. \end{array}$$

Como $\lim S_n$ não existe, a série é divergente.

3. Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} n$. Então

$$\begin{array}{rcl} S_1 &=& 1 \\ S_2 &=& 1+2=3 \\ S_3 &=& 1+2+3=6 \\ \vdots && \\ S_n &=& 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}. \end{array}$$

Como $\lim S_n = +\infty$, a série é divergente.

4. Consideremos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Então

$$\begin{array}{rcl} S_0 &=& 1 \\ S_1 &=& 1+\frac{1}{2} \\ \vdots && \\ S_n &=& 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n} = \dfrac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}. \end{array}$$

Como $\lim S_n = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, a série é convergente, e com soma igual a 2.

5. Consideremos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Então, observando que $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, temos que

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 - \tfrac{1}{2} \\
S_2 &= \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) = 1 - \tfrac{1}{3} \\
S_3 &= S_3 = \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \left(\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}\right) = 1 - \tfrac{1}{4} \\
&\vdots \\
S_n &= \left(1 - \tfrac{1}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \tfrac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Como $\lim S_n = 1$, a série é convergente, e com soma igual a 1.

Série geométrica. Chama-se série geométrica a uma série da forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$, com r constante.

Para $r \neq 1$, $S_n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$, e portanto

$$\lim S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{se } |r| < 1 \\ +\infty & \text{se } r > 1 \\ \text{não existe} & \text{se } r < -1 \end{cases}.$$

Para $r = 1$, pelo Exemplo 39.4.1, $\lim S_n = +\infty$, e para $r = -1$, pelo Exemplo 39.4.2, $\lim S_n$ não existe.

Assim, a série geométrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$ converge com soma igual a $\frac{1}{1-r}$ se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geq 1$.

Série redutível. Chama-se série redutível (ou série de Mengoli) a uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ cujo termo geral pode ser escrito na forma $a_n = z_n - z_{n+k}$. Esta série é convergente se e só se existe e é finito $\lim z_n$, e

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n - z_{n+k} = z_1 + z_2 + \cdots + z_k - k \lim z_n.$$

Aula 40

Critério do integral. Seja f uma função contínua, positiva e decrescente em $[1,+\infty[$ e seja $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente se e só se o integral impróprio $\int_{n=1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ é convergente.

Exemplo 40.1. Consideremos a série harmónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Como a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é contínua, positiva e decrescente em $[1,+\infty[$, pelo critério do integral a série harmónica é convergente se e só se o integral $\int_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ é convergente. Mas $\int_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty$, e portanto a série harmónica é divergente.

Propriedade.

1. A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se e só se a série $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ converge, para algum $p \in \mathbb{N}$.

2. Se $k \neq 0$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se e só se a série $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ converge, e $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n = k\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3. Se as séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são convergentes, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ é convergente, e $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Exemplo 40.2.

1. Como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente, então $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ é convergente, e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 6$.

2. Como as séries $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ são convergentes, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n})$ é convergente, e $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$.

Observação 40.3. Note-se que a recíproca de 3 não é verdadeira: por exemplo, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}$ são divergentes, e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n}$ é divergente, e as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ são divergentes, mas a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{-1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 0$ é convergente.

Condição necessária de convergência. Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\lim a_n = 0$.

Exemplo 40.4. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$ é divergente, porque $\lim \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$.

Observação 40.5. O recíproco não é verdadeiro. Por exemplo, a série harmónica diverge, apesar de $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Séries de Dirichlet. Chama-se série de Dirichlet a uma série da forma $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

A função $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ é contínua e positiva em $[1, +\infty[$. Como $f'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}$, f é decrescente para $\alpha > 0$.

Consideremos então $\alpha > 0$. Então

$$\int_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \underset{\alpha \neq 1}{=} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{n=1}^{+\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha} - 1) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha - 1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}.$$

Se $\alpha = 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$ e $\displaystyle\int_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty$.

Caso $\alpha \leq 0$, $\lim \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$.

Assim, a série de Dirichlet $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge para $\alpha > 1$ e diverge para $\alpha \leq 1$.

Aula 41

Critério da comparação. Sejam $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de termos não negativos. Se $a_n \leq b_n$ para $n \geq p$, então:

1. se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

2. se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Exemplo 41.1.

1. Consideremos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$. Como para todo o $n \in \mathbb{N}$, $n^2+1 \geq n^2$, então $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2}$, e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. Logo, a série converge.

2. Consideremos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Como para todo o $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{n} \leq n$, então $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Logo, a série diverge.

3. Consideremos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$. Para todo o $n \in \mathbb{N}$, $2^n \geq 1$, então $n2^n \geq n$, e $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{n}$, e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge. Logo, nada se pode concluir acerca de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$. Mas, para todo o $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, então $n2^n \geq 2^n$, e $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$, e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ converge. Logo, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ converge.

2° **Critério da comparação.** Sejam $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries de termos não negativos. Se $b_n \neq 0 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ e $l = \lim \frac{a_n}{b_n}$ existe, então:

1. se $l \in]0, +\infty[$, as séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ têm a mesma natureza;

2. se $l = 0$,

   (a) se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge;

   (b) se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge;

3. se $l = +\infty$,

   (a) se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge;

   (b) se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Exemplo 41.2.

1. Consideremos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$. Como $\lim \frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{4}$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, a série converge.

2. Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$. Como $\lim \frac{\frac{1}{n+\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = 1$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, a série diverge.

Critério da razão. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos positivos. Se $l = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe, então:

1. se $l < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente;

2. se $l > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exemplo 41.3. Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Como $\lim \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$, a série converge.

Critério da raíz. Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não negativos. Se $l = \lim \sqrt[n]{a_n}$ existe, então:

1. se $l < 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente;

2. se $l > 1$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

Exemplo 41.4. Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^n}}$. Como $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n^n}}} = \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, a série converge.

Aula 42

Critério de Leibniz. Seja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série tal que $a_n = (-1)^n b_n$ ou $a_n = (-1)^{n+1} b_n$, com $b_n > 0 \; \forall\, n \in \mathbb{N}$. Se a sucessão b_n é decrescente e $\lim b_n = 0$, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

Exemplo 42.1. Consideremos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$. Como $\frac{1}{n}$ é decrescente e $\lim \frac{1}{n} = 0$, a série converge.

Definição 42.2. A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se absolutamente convergente se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ for convergente, e diz-se simplesmente convergente se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, mas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é divergente.

Exemplo 42.3. A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ é absolutamente convergente, e a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é simplesmente convergente.

Propriedade. Se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Exemplo 42.4. Consideremos a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$. Como $\left|\frac{\sin n}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ é convergente, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2^n}$ é absolutamente convergente.

Aula 44

Definição 44.1. Dada a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, chama-se resto de ordem p à série $R_p = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n$.

Teorema 44.2. *Se $p \in \mathbb{N}$, $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ e existe k_p tal que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq k_p < 1$ para $n \geq p+1$, então $R_p \leq \frac{a_{p+1}}{1-k_p}$.*

Teorema 44.3. *Se $p \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ e existe k_p tal que $\sqrt[n]{a_n} \leq k_p < 1$ para $n \geq p+1$, então $R_p \leq \frac{k_p^{p+1}}{1-k_p}$.*

Teorema 44.4. *Seja b_n uma sucessão positiva decrescente com limite zero e seja R_p o resto de ordem p da série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$. Então $|R_p| \leq b_{p+1}$.*

Exemplo 44.5.

1. Sabendo que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$, vamos determinar o erro cometido ao aproximar e por $1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$.

   Sendo $a_n = \frac{1}{n!}$, temos que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{p+2} < 1$ para $n \geq p+1$. Seja então $k_p = \frac{1}{p+2}$. Temos assim que
$$R_p \leq \frac{\frac{1}{(p+1)!}}{1-\frac{1}{p+2}} = \frac{p+2}{(p+1)(p+1)!}.$$
   Para $p=4$, temos $R_4 \leq \frac{1}{100}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \simeq -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, com erro R_3 tal que $|R_3| \leq \frac{1}{4}$.