

Aula 46

Exemplo 46.1. Consideremos a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Para $x = \frac{1}{2}$ a série é convergente, e para $x = 2$ é divergente. Mais, sabemos que esta série é convergente para $x \in]-1, 1[$, e a sua soma é $\frac{1}{1-x}$.

Definição 46.2. Seja $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, para cada $n \in \mathbb{N}$. Diz-se que a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + \dots$

1. converge num ponto $x \in D$ se a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots$ for convergente;
2. converge pontualmente em $A \subseteq \mathbb{R}$ se converge em todos os pontos de A . Neste caso, à função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ dá-se o nome de soma (pontual) da série em A .

Exemplo 46.3.

1. A série de funções $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge pontualmente em $] - 1, 1[$ e tem soma $\frac{1}{1-x}$.
2. Consideremos a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$. Como, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{\sin(nx)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, a série de funções converge pontualmente em \mathbb{R} .
3. Consideremos a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n}$. Como, para $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{n} \right| = |x|$, a série de funções diverge para $x \neq 0$. Para $x = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n} = 0$, e portanto a série converge apenas no ponto 0.

Aula 47

Definição 47.1. Chama-se série de potências (de x) a uma série de funções da forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \left(= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right).$$

Exemplo 47.2.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ (série geométrica);
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ (série exponencial).

Propriedade. Se $R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ existe, então a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente para x tais que $|x| < R$ e é divergente para $|x| > R$. A R dá-se o nome de raio de convergência.

Observação 47.3.

1. Os casos $x = R$ e $x = -R$ têm que ser estudados separadamente.
2. As séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=p}^{\infty} a_n x^n$ têm o mesmo raio de convergência.

Exemplo 47.4.

1. Consideremos a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Então $a_n = 1$ e $R = \lim \left| \frac{1}{1} \right| = 1$, e a série é absolutamente convergente para $x \in]-1, 1[$ e divergente para $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Para $x = 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$ é divergente, e para $x = -1$, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ é divergente.

2. Consideremos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Então $a_n = \frac{1}{n!}$ e $R = \lim \left| \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} \right| = \lim(n+1) = +\infty$, e a série é absolutamente convergente para $x \in]-\infty, +\infty[$.

3. Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

Então $a_n = \frac{1}{n}$ e $R = \lim \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = \lim \frac{n+1}{n} = 1$, e a série é absolutamente convergente para $x \in]-1, 1[$ e divergente para $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Para $x = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é divergente, e para $x = -1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é simplesmente convergente.

4. Consideremos a série $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Então $a_n = n!$ e $R = \lim \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \lim \frac{1}{n+1} = 0$, e a série é divergente para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Para $x = 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 0$ é absolutamente convergente.

5. Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$.

Fazendo $y = x - 1$, vem que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n^2}$.

Então $a_n = \frac{1}{n^2}$ e $R = \lim \left| \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} \right| = \lim \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$, e a série é absolutamente convergente para $y \in]-1, 1[$, ou seja, para $x \in]0, 2[$ e divergente para $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$. Para $x = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ é absolutamente convergente, e para $x = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é absolutamente convergente.

Observação 47.5. Caso $\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ não exista, $R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Exemplo 47.6. Consideremos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(3+(-1)^n)^{2n}}$.

Então $a_n = \frac{1}{(3+(-1)^n)^{2n}}$ e $\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ não existe. Mas

$$R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\left| \frac{1}{(3+(-1)^n)^{2n}} \right|}} = \frac{1}{\lim \frac{1}{(3+(-1)^n)^2}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4,$$

e a série é absolutamente convergente para $x \in]-4, 4[$ e divergente para $x \in]-\infty, -4[\cup]4, +\infty[$.

Aula 48

Propriedade. Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ uma série de potências com raio de convergência $R > 0$. Então:

1. $f(x)$ é diferenciável em $] - R, R[$ e $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$.
2. $f(x)$ é primitivável em $] - R, R[$ e $Pf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$.

Exemplo 48.1. Consideremos novamente a série exponencial $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Já vimos que $R = +\infty$. A derivada de f é

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x).$$

De facto, prova-se que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$, para $x \in \mathbb{R}$.

Aula 50

Definição 50.1. Diz-se que uma função $f(x)$ definida num intervalo aberto I é analítica em $x_0 \in I$ se existe uma série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ de potências de $x-x_0$ tal que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ numa vizinhança de x_0 .

Exemplo 50.2.

1. Como $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, e^x é analítica em 0.
2. $f(x) = \frac{1}{x}$ não é analítica em 0.
3. Como $\frac{1}{x} = \frac{1}{1-(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n$, $\frac{1}{x}$ é analítica em 1.

Propriedade. Toda a função analítica num ponto é indefinidamente diferenciável numa vizinhança desse ponto (e todas as suas derivadas são analíticas).

Teorema 50.3. *Seja f analítica em x_0 . Então existe uma única série de potências de $x-x_0$ tal que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ numa vizinhança de x_0 . Para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.*

Definição 50.4. Seja $f(x)$ uma função definida num intervalo aberto I e indefinidamente diferenciável em $x_0 \in I$. Chama-se série de Taylor de f em x_0 à série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

Observação 50.5. Se f é analítica, a série de Taylor representa f . Caso f não seja analítica, a série pode não convergir, ou convergir mas não representar f .

Definição 50.6. Seja $f(x)$ uma função definida num intervalo aberto I e indefinidamente diferenciável em $x_0 \in I$. Chama-se polinómio de Taylor de grau n de f em x_0 a $p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

Propriedade. Seja $f(x)$ uma função definida num intervalo aberto I e indefinidamente diferenciável em $x_0 \in I$ e $p_n(x)$ o polinómio de Taylor de grau n de f em x_0 . Então f é analítica em x_0 se e só se $f(x) - p_n(x) \xrightarrow[n]{} 0$ pontualmente numa vizinhança de x_0 .

Fórmula de Taylor com resto de Lagrange. Sejam $n \in \mathbb{N}$, $f(x)$ uma função definida num intervalo aberto I com derivadas contínuas em I até à ordem $n+1$ e $x_0 \in I$. Então para qualquer $x \in I$ existe c estritamente entre x e x_0 tal que $f(x) = p_n(x) + R_n(x)$, onde $p_n(x)$ é o polinómio de Taylor de grau n de f em x_0 e $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ é o resto de Lagrange.

Exemplo 50.7. Aplicando a fórmula de Taylor de grau 3 à função e^x no ponto 0, obtemos que $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{e^c}{4!}x^4$, para algum c entre 0 e x . Como numa vizinhança de 0, $e^c \leq 2$, vem que $e^{0.1} \simeq 1 + 0.1 + \frac{0.1^2}{2!} + \frac{0.1^3}{3!}$, com erro $R_3(0.1)$ inferior a $\frac{2 \times 0.1^4}{4!}$.

Aula 52

Exemplo 52.1.

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, para $x \in \mathbb{R}$;
2. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, para $x \in]-1, 1[$;
3. $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$, para $x \in]-1, 1[$;
4. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, para $x \in \mathbb{R}$;
5. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, para $x \in \mathbb{R}$;

Definição 52.2. Seja g uma função definida e não nula em $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\setminus \{a\}$, para algum $\varepsilon > 0$. Diz-se que a função $w(x)$ é um “ o ”-pequeno com $g(x)$ quando $x \rightarrow a$, e escreve-se $w = o(g)$ quando $x \rightarrow a$, se

1. w está definida numa vizinhança de a ;
2. $w(a) = 0$;
3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{w(x)}{g(x)} = 0$.

Observação 52.3. Note-se que, na fórmula de Taylor de grau n de f em x_0 , $R_n(x) = o((x-x_0)^n)$ quando $x \rightarrow x_0$.

Exemplo 52.4. Temos que $e^x = 1+x+o(x)$ quando $x \rightarrow 0$, e logo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+o(x) - 1}{x} =$
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+o(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{o(x)}{x} = 1 + 0 = 1$.