Aula 7

Definição 7.1. Diz-se que f é diferenciável em $a \in D$ se existe e é finito o limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

A este limite dá-se o nome de derivada de f no ponto a, e representa-se por $f'(a)$.

Exemplo 7.2. A função $f(x) = x^2 - 1$ é diferenciável no ponto 1, e a sua derivada é dada por

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

Interpretação geométrica. $f'(a)$ representa o declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto a.

Definição 7.3. Diz-se que f é diferenciável à esquerda em a se existe e é finito o limite

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_e(a).$$

Diz-se que f é diferenciável à direita em a se existe e é finito o limite

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_d(a).$$

Propriedade. f é diferenciável em a se e só se f é diferenciável à esquerda e à direita em a e $f'_e(a) = f'_d(a)$.

Exemplo 7.4. A função $f(x) = |x|$ não é diferenciável em 0, uma vez que $f'_e(0) = -1$ e $f'_d(0) = 1$.

Regras de derivação. Sejam u e v funções diferenciáveis, k uma constante e $n \in \mathbb{N}$. Então

1. $(k \cdot u)' = k \cdot u'$;
2. $(u + v)' = u' + v'$;
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$;
5. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$;
6. $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$;
7. $(\mathrm{e}^u)' = u' \cdot \mathrm{e}^u$;
8. $(k^u)' = u' \cdot \ln k \cdot k^u$;
9. $(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + v' \cdot \ln u \cdot u^v$;
10. $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$;
11. $(\log_k u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln k}$;
12. $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$;
13. $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$;
14. $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;
15. $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$;
16. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$;
17. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$;
18. $(\arctan u)' = \frac{u'}{1 + u^2}$;
19. $(\sinh u)' = u' \cosh u$;
20. $(\cosh u)' = u' \sinh u$;
21. $(\tanh u)' = \frac{u'}{\cosh^2 u}$;
22. $(\coth u)' = -\frac{u'}{\sinh^2 u}$;
23. $(\arg\sinh u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 + u^2}}$;
24. $(\arg\cosh u)' = \frac{u'}{\sqrt{u^2 - 1}}$;
25. $(\arg\tanh u)' = \frac{u'}{1 - u^2}$.

Exemplo 7.5.

1. $(-2x)' = -2$
2. $(2x^2+3)' = 4x$
3. $((x^7-2)\cdot(x+3x^3))' = 30x^9+8x^7-18x^2-2$
4. $\left(\dfrac{2x+3}{x^2-5x+5}\right)' = -\dfrac{2x^2+6x-25}{(x^2-5x+5)^2}$
5. $\left(\left(5x^4-20\right)^5\right)' = 5\cdot\left(5x^4-20\right)^4\cdot 20x^3$
6. $\left(\sqrt[5]{x^2-6}\right)' = \dfrac{2x}{5\sqrt[5]{(x^2-6)^4}}$
7. $\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
8. $(5^{x^2})' = 2x'\cdot\ln 5\cdot 5^{x^2}$
9. $\left((x^2-1)^{-3x}\right)' = -3x\cdot(x^2-1)^{-3x-1}\cdot 2x- 3\cdot\ln(x^2-1)\cdot(x^2-1)^{-3x}$
10. $(\ln x^6)' = \dfrac{6}{x}$
11. $(\log_{12} 8x)' = \dfrac{8}{8x\cdot\ln 12}$
12. $(\sin\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x\cdot\cos\mathrm{e}^x$
13. $(\cos\ln x)' = -\dfrac{1}{x}\cdot\sin\ln x$
14. $(\tan 2x^5)' = \dfrac{10x^4}{\cos^2 2x^5}$
15. $(\cot 2x)' = -\dfrac{2}{\sin^2 2x}$
16. $(\arcsin\mathrm{e}^x)' = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{2x}}}$
17. $(\arccos x^3)' = -\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$
18. $(\arctan 3x^2)' = \dfrac{6x}{1+9x^4}$
19. $(\sinh\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x\cosh\mathrm{e}^x$
20. $(\cosh\sin x)' = \cos x\cdot\sinh\sin x$
21. $(\tanh(1-x^2)' = \dfrac{-2x}{\cosh^2(1-x^2)}$
22. $(\coth\ln x)' = -\dfrac{\frac{1}{x}}{\sinh^2\ln x}$
23. $(\arg\sinh 5x)' = \dfrac{5}{\sqrt{1+25x^2}}$
24. $(\arg\cosh\mathrm{e}^{x^2})' = \dfrac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x^2}-1}}$
25. $(\arg\tanh(x^3-x))' = \dfrac{3x^2-1}{1-(x^3-x)^2}$

Função composta. Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ e $g : E \to \mathbb{R}$ funções tais que $g(D) \subseteq E$. Se g é diferenciável em a e f é diferenciável em $g(a)$, então $f\circ g$ é diferenciável em a e

$$(f\circ g)'(a) = f'(g(a))\cdot g'(a).$$

Exemplo 7.6. Seja $g(x) = f(\mathrm{e}^{x^2-1})$, com f diferenciável. Então $g'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2-1}f'(\mathrm{e}^{x^2-1})$.

Função inversa. Seja f uma função diferenciável tal que $f'(a)\neq 0$. Então a função inversa f^{-1} é diferenciável em $b = f(a)$ e

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Exemplo 7.7.

1. $y = \arcsin x (\Leftrightarrow x = \sin y)$, podemos aplicar a regra de derivação da função inversa para obter a derivada de $\arcsin x$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}.$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria,

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2(y)} = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}.$$

Logo $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2. Sendo $y = \arctan x (\Leftrightarrow x = \tan y)$, podemos aplicar a regra de derivação da função inversa para obter a derivada de $\arctan x$:

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2(\arctan x).$$

Pela fórmula fundamental da trigonometria,

$$\tan^2 y + 1 = \frac{1}{\cos^2 y} \Rightarrow \cos^2(y) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Logo $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Definição 7.8. Seja f uma função. A recta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é dada pela equação

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$

A recta ortogonal ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é dada pela equação

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a).$$

Exemplo 7.9. Seja $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 5$. Então $f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$. A equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 3$ é

$$y - f(3) = f'(3)(x-3) \Rightarrow y - 2 = 8(x-3),$$

e a equação da recta ortogonal ao gráfico de f no mesmo ponto é

$$y - f(3) = -\frac{1}{f'(3)}(x-3) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{8}(x-3).$$

Aula 9

Recordar. Seja f uma função. Diz-se que f tem:

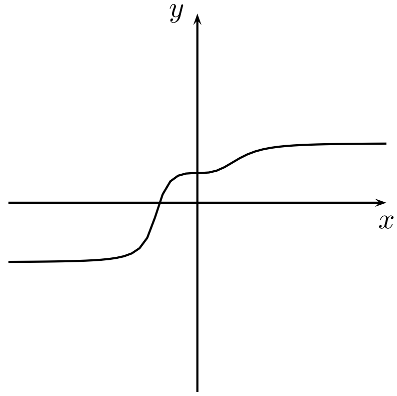
1. um máximo local em $a \in D$ se existe uma vizinhança de a, V, tal que $f(x) \leq f(a)$ para todo o $x \in V \cap D$;

2. um mínimo local em a se existe uma vizinhança de a, V, tal que $f(x) \geq f(a)$ para todo o $x \in V \cap D$.

Propriedade. Seja f uma função diferenciável em $a \in \text{int}(D)$. Se f tem um extremo local em a, então $f'(a) = 0$.

Exemplo 9.1.

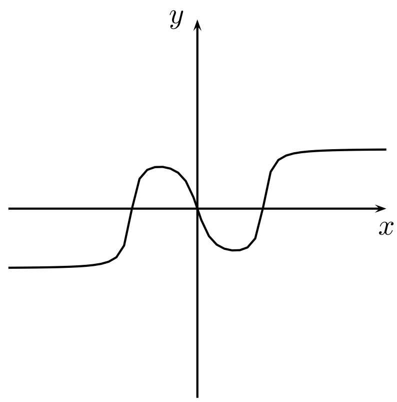
1. Seja $f(x) = \arctan(x^3 + 1)$. Então $f'(x) = \dfrac{3x^2}{1 + (x^3 + 1)^2}$ e $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. No entanto, f não tem um extremo local em 0, pois f' é positiva para valores diferentes de 0.



2. Seja $f(x) = \arctan(x^3 - 3x)$. Então $f'(x) = \dfrac{3x^2 - 3}{1 + (x^3 + 1)^2} = \dfrac{3(x+1)(x-1)}{1 + (x^3 + 1)^2}$ e $f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \vee x = 1$. Estudemos o sinal de f':

	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$1 + (x^3 + 1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

Concluímos assim que f tem um máximo para $x = -1$ e um mínimo para $x = 1$.



Definição 9.2. Seja f uma função. Diz-se que f:

1. concavidade virada para cima num intervalo $[a, b]$ se $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ para quaisquer $x, y \in [a, b]$ (isto é, se o ponto médio do segmento de recta definido por $f(x)$ e $f(y)$ está acima ou sobre o gráfico de f.

2. concavidade virada para baixo num intervalo $[a, b]$ se $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ para quaisquer $x, y \in [a, b]$ (isto é, se o ponto médio do segmento de recta definido por $f(x)$ e $f(y)$ está abaixo ou sobre o gráfico de f.

Observação 9.3. Se f é diferenciável no ponto $a \in \text{int}(D)$, diz-se que f tem a concavidade virada para cima em a se o gráfico de f está acima do gráfico da recta tangente $y - f(a) = f'(a)(x-a)$; diz-se que f tem a concavidade virada para baixo em a se o gráfico de f está abaixo do gráfico da recta tangente $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.

Propriedade. Sejam f uma função com primeira e segunda derivadas contínuas, e $a \in \text{int}(D)$. Então:

1. Se $f''(a) > 0$, o gráfico de f tem a concavidade virada para cima no ponto a;

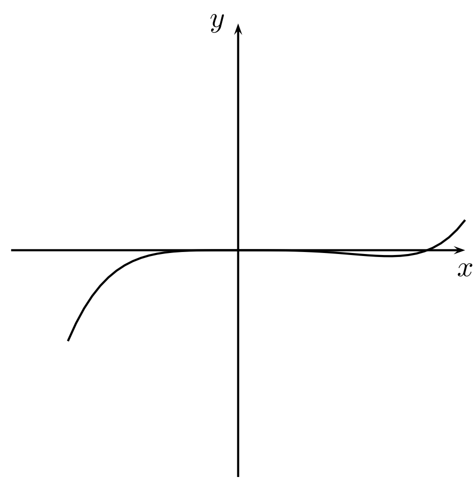
2. Se $f''(a) < 0$, o gráfico de f tem a concavidade virada para baixo no ponto a;

3. Se f tem um ponto de inflexão em a, então $f''(a) = 0$.

Exemplo 9.4. Seja $f(x) = \dfrac{1}{20}x^5 - \dfrac{1}{12}x^4$. Então $f''(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$, e $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$. Estudemos o sinal de f'':

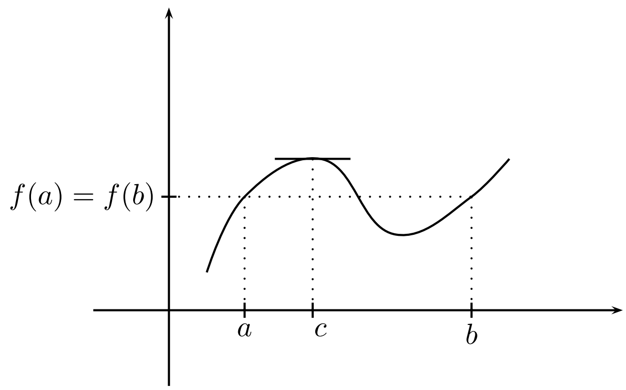
	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x^2	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cap$	$P.I.$	$\cup$

Concluímos assim que f tem um ponto de inflexão em $x = 1$.



Aula 11

Teorema 11.1 (Rolle)**.** *Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. Se $f(a)=f(b)$, então existe $c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=0$.*



Exemplo 11.2. Seja $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$.

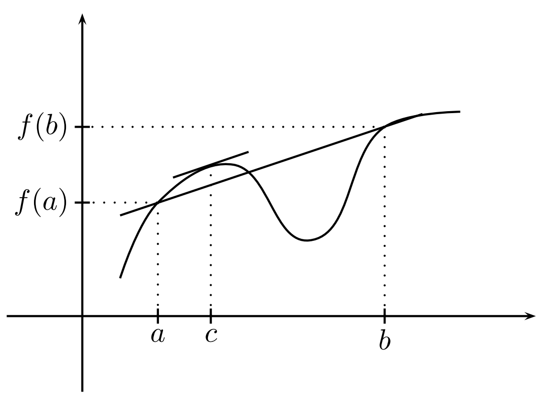
Vejamos se se pode aplicar o Teorema de Rolle a f no intervalo $[-2,2]$: como f é contínua em $\mathbb{R}$, também é contínua em $[-2,2]$; temos que

$$f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

não está definida para $x=\pm1$, e logo f não é diferenciável em $]-2,2[$. Portanto não se pode aplicar o Teorema de Rolle.

Se considerarmos o intervalo $[-1,1]$, temos: f é contínua em $[-1,1]$ e diferenciável em $]-1,1[$. Como $f(-1)=f(1)=0$, pelo Teorema de Rolle existe $c\in]-1,1[$ tal que $f'(c)=0$.

Teorema 11.3 (Lagrange)**.** *Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$. Então existe $c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*



Exemplo 11.4. Seja $f(x)=x^2-1$, e consideremos o intervalo $[0,2]$. Como f é um polinómio, é contínua em $[0,2]$ e diferenciável em $]0,2[$. Então, pelo Teorema de Lagrange, existe $c\in]0,2[$ tal que $f'(c)=\dfrac{3-(-1)}{2-0}=2$.