

Exercícios

1. Complementos de funções reais de variável real.

1. Indique quais das seguintes expressões são proposições, e qual o seu valor lógico.

- (a) $1 + 2$; (c) π ; (e) $\{1, 2, 3\}$;
(b) $1 + 2 = 3$; (d) $\pi > 10$; (f) $4 \notin \{1, 2, 3\}$.

2. Traduza em linguagem corrente e indique o valor lógico das seguintes proposições:

- (a) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x \cdot y = x$; (c) $\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} x \cdot y = x$.
(b) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} x \cdot y = x$;

3. Resolva as seguintes equações:

- (a) $\ln \left| \frac{x+2}{3-x} \right| = 0$; (b) $\sqrt{\frac{1}{3}x(x-6)} = 0$; (c) $e^x - e^{-x} = 0$.

4. Calcule para que valores reais de x são válidas as desigualdades:

- (a) $\frac{(x+2)(x^2+1)}{1+x} < 0$; (d) $x^2 - 3x + 2 < 0$; (g) $|1-x| - x \geq 0$;
(b) $\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-5x+6}} > 1$; (e) $|x-1| < |x+1|$; (h) $\left| \frac{x^2-x}{1+x} \right| > x$;
(c) $e^{x^2-x} \geq e^2$; (f) $\left| \frac{x+1}{x} \right| < 6$; (i) $3x^3 - 2x^2 + 3x > 2$.

5. Determine em \mathbb{R} um majorante, um minorante, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo, caso existam, dos seguintes conjuntos:

- (a) $\{1, \sin 1, \sin 2\}$; (c) $\left\{ m + \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$;
(b) $\left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$; (d) $\left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$.

6. Determine em \mathbb{R} o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação dos seguintes conjuntos:

- (a) $A = [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{6, 10\}$; (e) $E = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \geq |x|\}$;
(b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 9\}$; (f) $F = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+3} > \frac{x}{x+2} \right\}$;
(c) $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-3| \leq 5\}$; (g) $G = (\mathbb{R} \setminus]-1, +\infty[) \cap \mathbb{Q}$.
(d) $D = \{x \in \mathbb{R} : x^3 > x\}$;

7. Considere as funções

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2x+5} & g(x) &= \sqrt{3-x} & h(x) &= \sqrt[3]{1-3x} \\ r(x) &= \ln \frac{x^4}{x^2+2} & s(x) &= 2 + \cos x & t(x) &= \sin^2 x \end{aligned}$$

- Determine os seus domínios e contradomínios.
- Indique, justificando, quais são injectivas e/ou sobrejectivas.
- Indique, justificando, quais são pares, ímpares ou periódicas.
- Caracterize $g \circ f$.
- Justifique que existe, e caracterize, h^{-1} .

8. Calcule:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right); & \text{(c)} \quad & \tan \left(\arcsin -\frac{1}{2} \right); & \text{(e)} \quad & \sin \left(\arccos -\frac{5}{13} \right); \\ \text{(b)} \quad & \cos \left(\arcsin \frac{4}{5} \right); & \text{(d)} \quad & \cos \left(\arccos -\frac{\sqrt{2}}{2} \right); & \text{(f)} \quad & \tan(\arccos 1). \end{aligned}$$

9. Prove que:

- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$;
- $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$;
- $\sinh(x+y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y$;
- $\cosh(x+y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$;
- $\sinh(2x) = 2 \cdot \sinh x \cdot \cosh x$;
- $\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x$;
- $\tanh(2x) = \frac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$.

10. Mostre que:

- Se f é uma função ímpar e $0 \in D$, então $f(0) = 0$;
- O produto (quociente) de duas funções ímpares (pares) é uma função par;
- O produto (quociente) de uma função ímpar por uma função par é uma função ímpar;
- A composição de duas funções ímpares é uma função ímpar;
- Se f é uma função par, a composta $g \circ f$ é uma função par, para qualquer função g .

11. Mostre, utilizando a definição, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

12. Estude quanto à continuidade as seguintes funções:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & f(x) = |x| \cdot e^{-|x|}; & \text{(d)} \quad & f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}; \\ \text{(b)} \quad & f(x) = |x^3|; & \text{(e)} \quad & f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} - 2x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}. \\ \text{(c)} \quad & f(x) = x \ln \sin^2 x; \end{aligned}$$

13. Determine todos os valores de k para os quais a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x + k & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

é contínua em \mathbb{R} .

14. Verifique se as seguintes funções são prolongáveis por continuidade à origem, e, caso sejam, determine o seu prolongamento:

(a) $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{1}{x}}}$;

(b) $f(x) = \frac{x^4 + x^2}{x^4 + 3x}$.

15. Mostre que se f é uma função contínua em $[a, b]$ tal que $a \leq f(x) \leq b \forall x \in [a, b]$, então existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$.

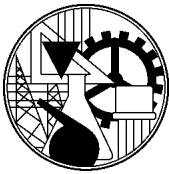
Soluções.

1. (b) V; (d) F; (f) V.
2. (a), (b), (c) V.
3. (a) $x = \frac{1}{2}$; (b) $x = 0 \vee x = 6$; (c) $x = 0$.
4. (a) $x \in] - 2, - 1[$; (b) $x \in]\frac{7}{5}, 2[\cup]3, +\infty[$; (c) $x \in] - \infty, - 1] \cup [2, +\infty[$;
 (d) $x \in]1, 2[$; (e) $x \in]0, +\infty[$; (f) $x \in] - \infty, -\frac{1}{7}[\cup]\frac{1}{5}, +\infty[$; (g) $x \in] - \infty, \frac{1}{2}[$;
 (h) $x \in] - \infty, - 1[\cup] - 1, 0[$; (i) $x \in]\frac{2}{3}, +\infty[$.

5.

	major.	minor.	sup	inf	max	min
(a)	2	0	1	$\sin 1$	1	$\sin 1$
(b)	2	0	1	0	1	\emptyset
(c)	\emptyset	0	\emptyset	1	\emptyset	\emptyset
(d)	2	0	2	0	2	\emptyset

6. (a) $\text{int}(A) =]0, 1[\cup]2, 3[$, $\text{fr}(A) = \{0, 1, 2, 3, 6, 10\}$, $A' = [0, 1] \cup [2, 3]$;
 (b) $\text{int}(B) =] - 3, 3[$, $\text{fr}(B) = \{-3, 3\}$, $B' = [-3, 3]$;
 (c) $\text{int}(C) =] - 2, 3[\cup]3, 8[$, $\text{fr}(C) = \{-2, 3, 8\}$, $C' = [-2, 8]$;
 (d) $\text{int}(D) =] - 1, 0[\cup]1, +\infty[$, $\text{fr}(D) = \{-1, 0, 1\}$, $D' = [-1, 0] \cup [1, +\infty[$;
 (e) $\text{int}(E) =] - \infty, \frac{1}{2}[$, $\text{fr}(E) = \{\frac{1}{2}\}$, $E' =] - \infty, \frac{1}{2}[$;
 (f) $\text{int}(F) =] - \infty, - 3[\cup] - 2, - 1[$, $\text{fr}(F) = \{-3, -2, -1\}$, $F' =] - \infty, - 3] \cup [-2, -1]$;
 (g) $\text{int}(G) = \emptyset$, $\text{fr}(G) =] - \infty, - 1[$, $G' =] - \infty, - 1[$.
7. (a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{5}{2}\}$, $CD_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$, $D_g =] - \infty, 3]$, $CD_g = \mathbb{R}_0^+$, $D_h = \mathbb{R}$, $CD_h = \mathbb{R}$,
 $D_r = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $CD_r = \mathbb{R}$, $D_s = \mathbb{R}$, $CD_s = [1, 3]$, $D_t = \mathbb{R}$, $CD_t = [0, 1]$;
 (b) Injectivas: f, g, h , sobrejectivas: h, r ;
 (c) Pares: r, s, t , periódicas: s, t ;
 (d) $g \circ f(x) = \sqrt{\frac{5x+15}{2x+5}}$, $D_{g \circ f} =] - \infty, - 3] \cup] - \frac{5}{2}, +\infty[$;
 (e) $h^{-1}(x) = \frac{1}{3}(1 - x^3)$, $D_{h^{-1}} = \mathbb{R}$.
8. (a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $\frac{3}{5}$; (c) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; (d) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; (e) $\frac{12}{13}$; (f) 0.
12. (a) contínua em \mathbb{R} ; (b) contínua em \mathbb{R} ; (c) contínua em $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$; (d) contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; (e) contínua em \mathbb{R} .
14. $k = -1$.
13. (a) não é prolongável; (b) é prolongável, com $\bar{f}(0) = 0$.



Exercícios

2. Complementos de cálculo diferencial em \mathbb{R} .

1. Calcule a função derivada da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 2 \\ x + 2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}.$$

2. Calcule a e b de modo a que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x < 2 \\ ax + b & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

seja diferenciável em \mathbb{R} e determine para esses valores de a e b a função derivada.

3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 6$.

- Determine os pontos onde a tangente ao gráfico de f é horizontal.
- Determine os pontos onde a tangente ao gráfico de f tem declive -6 .
- Mostre que a recta $y = 12x - 17$ é tangente ao gráfico de f e determine o ponto de tangência.

4. Determine o domínio e as funções derivadas das funções:

- | | |
|--------------------------------|------------------------|
| (a) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$; | (c) $f(x) = (x^x)^x$; |
| (b) $f(x) = x^x$; | (d) $f(x) = x^{x^x}$. |

5. Determine a derivada das seguintes funções:

- | | |
|--|---|
| (a) $f(x) = \sin^3 5x \cos^2 \frac{x}{3}$; | (i) $f(x) = 3^{\cot \frac{1}{x}}$; |
| (b) $f(x) = \frac{x^8}{8(1-x^2)^4}$; | (j) $f(x) = \ln \frac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$; |
| (c) $f(x) = \frac{4}{3} \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+2}}$; | (k) $f(x) = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$; |
| (d) $f(x) = \ln(\sqrt{1+e^x} - 1)$; | (l) $f(x) = \sinh^3 2x$; |
| (e) $f(x) = \sin^2 x^3$; | (m) $f(x) = \ln \sinh 2x$; |
| (f) $f(x) = \frac{1}{2} \arcsin^2 x \arccos x$; | (n) $f(x) = e^x \cosh x$; |
| (g) $f(x) = \ln \arcsin 5x$; | (o) $f(x) = \arg \tanh \tan x$; |
| (h) $f(x) = \arctan \frac{x \sin 1}{1-x \cos 1}$; | (p) $f(x) = \arg \cosh \ln x$. |

6. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável com derivada f' . Determine a derivada de:

(a) $f(-x)$; (b) $f(e^x)$; (c) $f(\ln(x^2 + 1))$; (d) $f(f(x))$.

7. Mostre que as seguintes funções têm um extremo local nos pontos indicados, não sendo todavia diferenciáveis nesses pontos:

(a) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x > 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ em $x = 0$; (b) $f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2}$ em $x = 3$;
(c) $f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-3)^2}$ em $x = 0$ e $x = 3$.

8. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 + 4x - 1$.

- (a) Utilize o Teorema de Bolzano para mostrar que f tem pelo menos um zero em \mathbb{R} .
(b) Utilize o Teorema de Rolle para mostrar que f não pode ter mais do que um zero em \mathbb{R} .

9. Utilize o Teorema de Rolle para provar que:

- (a) O polinômio $x^{102} + ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem no máximo duas raízes reais;
(b) O polinômio $x^{101} + ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, tem no máximo três raízes reais.

10. Utilize o Teorema de Lagrange para provar as seguintes desigualdades:

(a) $\tan x > x \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$; (d) $\frac{x}{1+x^2} \leq \arctan x \leq x \forall x \in [0, +\infty[$;
(b) $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x} \forall x \in]0, +\infty[$; (e) $8 + \frac{1}{9} < \sqrt{66} < 8 + \frac{1}{8}$.
(c) $|\sin x| \leq |x| \forall x \in \mathbb{R}$;

11. Calcule, caso existam, os limites:

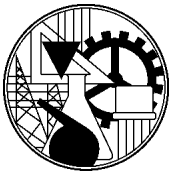
(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$; (c) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{\tan 5x}$; (e) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$;
(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{1 - \cos x}$; (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$; (f) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

12. Estude as seguintes funções:

(a) $f(x) = x(x^2 - 4)$; (d) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$; (f) $f(x) = \sin^2 x$;
(b) $f(x) = x(x-6)+9x+5$; (g) $f(x) = x - \sin x$;
(c) $f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2}$; (e) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$; (h) $f(x) = x + \cos x$.

Soluções.

1. $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 2 \\ 1 & \text{se } x > 2 \end{cases}$.
2. $a = 4, b = -4$ e $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 2 \\ 4 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$.
3. (a) $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$; (b) $x = 0$ e $x = -\frac{1}{2}$; (c) $x = 1$.
4. (a) $D =]e, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$; (b) $D = \mathbb{R}^+$, $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$;
(c) $D = \mathbb{R}^+$, $f'(x) = x^{x^2}(2x \ln x + x)$; (d) $D = \mathbb{R}^+$, $f'(x) = x^{x^x}(x^x(\ln x + 1) \ln x + x^{x-1})$.
5. (a) $f'(x) = 15 \sin^2 5x \cos 5x \cos^2 \frac{x}{3} - \frac{2}{3} \sin^3 5x \cos \frac{x}{3} \sin x 3$; (b) $f'(x) = \frac{x^7}{(1-x^2)^5}$;
(c) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$; (d) $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}(\sqrt{1+e^x}-1)}$; (e) $f'(x) = 3x^2 \sin 2x^3$;
(f) $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{\arcsin x(2 \arccos x - \arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$; (g) $f'(x) = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2} \arcsin 5x}$; (h) $f'(x) = \frac{\sin 1}{1-2x \cos 1+x^2}$;
(i) $f'(x) = \frac{3^{\cot \frac{1}{x}} \ln 3}{x^2 \sin^2 \frac{1}{x}}$; (j) $f'(x) = \frac{2x+11}{x^2-x-2}$; (k) $f'(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2 \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;
(l) $f'(x) = 6 \sinh^2 2x \cosh 2x$; (m) $f'(x) = 2 \coth 2x$; (n) $f'(x) = e^x(\cosh x + \sinh x)$;
(o) $f'(x) = \frac{1}{\cos 2x}$; (p) $f'(x) = \frac{1}{x \sqrt{\ln^2 x - 1}}$.
6. (a) $-f'(-x)$; (b) $e^x f'(e^x)$; (c) $\frac{2x}{x^2+1} f'(\ln(x^2+1))$; (d) $f'(f(x))f'(x)$.
- 4c. (a) $-\frac{1}{3}$; (b) 1; (c) 5; (d) 1; (e) e^3 ; (f) $\frac{1}{e}$.



Exercícios

3. Primitivação.

1. Determine uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

(a) $\sqrt{2x} + \sqrt{\frac{x}{2}}$;	(f) 2^{x+1} ;	(m) $\frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x}$;	(r) $\frac{\arctan^2 x}{1 + x^2}$;
(b) $\frac{2x^2 - 6x + 7}{\sqrt{x}}$;	(g) xe^{-x^2} ;	(n) $\tan x$;	(s) $\frac{1}{\sqrt{1 - 4x^2}}$;
(c) $3 \sin x + 2x^2$;	(h) $e^x \sin e^x$;	(o) $\frac{1}{1 + 3x^2}$;	(t) $\frac{x}{\sqrt{1 - 2x^4}}$;
(d) $(1 + \sqrt{x})^2$;	(i) $\frac{3 \sin x}{(1 + \cos x)^2}$;	(p) $\frac{e^x}{e^{2x} + 4}$;	(u) $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$;
(e) $\frac{x^2}{1 + x^3}$;	(j) $x\sqrt{1 + x^2}$;	(q) $\frac{\sqrt{\ln x}}{x}$;	
	(k) $e^{2 \sin x} \cos x$;		
	(l) $\frac{1}{1 + e^x}$;		

2. Utilize o método da primitivação por partes, ou outro, para obter as primitivas das funções seguintes:

(a) $x \cos x$;	(e) $e^x \sin x$;	(i) $x \ln x$;	(m) $\sec^4 x$;
(b) $x \sin x$;	(f) $x^2 e^x$;	(j) $x \arctan x$;	(n) $\sec^3 x$;
(c) $x^2 \sin x$;	(g) $x^3 e^{-x^2}$;	(k) $\arctan x$;	(o) $\log_{10} x$.
(d) xe^x ;	(h) $\ln(2x + 3)$;	(l) $\arcsin x$;	

3. Utilize o método da substituição, ou outro, para obter primitivas das funções seguintes:

(a) $x\sqrt{1+x}$;	(e) $\frac{\sin x}{(3 + \cos x)^2}$;	(h) $\frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$;	(k) $\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$;
(b) $\frac{x}{\sqrt{2 - 3x}}$;	(f) $(1 + x^2)^{-\frac{3}{2}}$;	(i) $\frac{1}{x\sqrt{1 + x^2}}$;	(l) $\frac{1}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$;
(c) $\frac{x^5}{\sqrt{1 - x^6}}$;	(g) $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;	(j) $\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$;	(m) $x \sin x^2$.
(d) $\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;			

4. Calcule primitivas das seguintes funções racionais:

(a) $\frac{x^5}{x^2 - 1}$;	(c) $\frac{x}{x^2 + 2x + 3}$;	(e) $\frac{2x - 3}{(x^2 + 1)^2}$;
(b) $\frac{x}{(x + 1)(x + 2)^2}$;	(d) $\frac{1}{x^4 - 1}$;	(f) $\frac{5x - 3}{(x^2 + 5)^2}$.

5. Primitiva as seguintes funções:

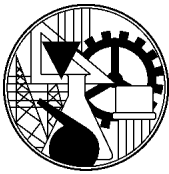
- | | | |
|---|---|--|
| (a) $\sin^5 x$; | (i) $\frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ ($a > 0$); | (n) $\frac{x^4}{x^4 - 1}$; |
| (b) $\cos^4 x$; | (j) $\frac{3x - 7}{x^2 + 9}$; | (o) $\frac{x^3 + x + 1}{x(x^2 + 1)}$; |
| (c) $\sin^4 x \cos^3 x$; | (k) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + 1}}$; | (p) $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$; |
| (d) $\cos^4 x \sin^2 x$; | (l) $\frac{1}{2 + \cos x}$; | (q) $x\sqrt{a^2 + x^2}$; |
| (e) $\cos 2x \cdot \sin 4x$; | (m) $\frac{1}{\cos x + 2 \sin x + 3}$; | (r) $\frac{1}{\sin x}$. |
| (f) $\frac{1}{2x^2 - x + 1}$; | | |
| (g) $\frac{x + 3}{x^2 - x - 2}$; | | |
| (h) $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ ($a > 0$); | | |

6. Determine uma função f que verifique:

- (a) $f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$ com $f(1) = 2$;
- (b) $f''(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$ com $f'(e) = 1$ e $f(1) = 2$.

Soluções.

1. (a) $\sqrt{2x^3}$; (b) $\frac{4}{5}\sqrt{x^5} - 4\sqrt{x^3} + \frac{x^2}{2}$; (c) $-3\cos x + \frac{2}{3}x^3$; (d) $x + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + \frac{x^2}{2}$; (e) $\frac{1}{3}\ln|1+x^3|$;
 (f) $\frac{2^{x+1}}{\ln 2}$; (g) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$; (h) $-\cos e^x$; (i) $\frac{3}{1+\cos x}$; (j) $\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}$; (k) $\frac{1}{2}e^{2\sin x}$; (l) $-\ln(1+e^{-x})$;
 (m) $\frac{1}{2}\tan x + \frac{1}{2}x$; (n) $-\ln|\cos x|$; (o) $\frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan\sqrt{3}x$; (p) $\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}e^x$; (q) $\frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}$;
 (r) $\frac{1}{3}\arctan^3 x$; (s) $\frac{1}{2}\arcsin 2x$; (t) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}x^2$; (u) $\arcsin\frac{x}{a}$.
2. (a) $x\sin x + \cos x$; (b) $\sin x - x\cos x$; (c) $-x^2\cos x + 2\cos x + 2x\sin x$; (d) $xe^x - e^x$;
 (e) $-\frac{1}{2}e^x\cos x + \frac{1}{2}e^x\sin x$; (f) $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$; (g) $-\frac{1}{2}e^{-x^2}(x^2+1)$; (h) $(x+\frac{3}{2})\ln(2x+3) - x$;
 (i) $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$; (j) $\frac{1}{2}\arctan x(x^2+1) - \frac{1}{2}x$; (k) $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$;
 (l) $x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; (m) $\frac{\sin x(1+2\cos^2 x)}{3\cos^3 x}$; (n) $\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x|$;
 (o) $\frac{1}{\ln 10}(x\ln x - x)$.
3. (a) $\frac{2}{5}\sqrt{(x+1)^5} - \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}$; (b) $-\frac{4}{9}\sqrt{2-3x} + \frac{2}{27}\sqrt{(2-3x)^3}$; (c) $-\frac{1}{3}\sqrt{1-x^6}$; (d) $-2\cos\sqrt{x}$;
 (e) $\frac{1}{3+\cos x}$; (f) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; (g) $\frac{2}{\ln 2}2^{\sqrt{x}}$; (h) $2\arctan\sqrt{e^x-1}$; (i) $-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|$; (j) $-\sqrt{1-x^2}$;
 (k) $\sqrt{1+x^2} - \ln\left|\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right|$; (l) $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}$; (m) $-\frac{1}{2}\cos x^2$.
4. (a) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|x^2-1|$; (b) $\ln\left|\frac{x+2}{x+1}\right| - \frac{2}{x+2}$;
 (c) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3) - \frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)\right)$; (d) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x$;
 (e) $\frac{x^2}{x^2+1} - \frac{3}{2}\arctan x - \frac{3}{2}\frac{x}{x^2+1}$; (f) $\frac{1}{20}\frac{-6x-50}{x^2+5} - \frac{3\sqrt{5}}{50}\arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x\right)$.
5. (a) $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x$; (b) $\frac{1}{4}\cos^3 x\sin x + \frac{3}{8}\cos x\sin x + \frac{3}{8}x$;
 (c) $-\frac{1}{7}\sin^3 x\cos^4 x - \frac{3}{35}\sin x\cos^4 x + \frac{1}{35}\cos^2 x\sin x + \frac{2}{35}\sin x$;
 (d) $-\frac{1}{6}\sin x\cos^5 x + \frac{1}{24}\cos^3 x\sin x + \frac{1}{16}\cos x\sin x + \frac{1}{16}x$; (e) $-\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{4}\cos 2x$;
 (f) $\frac{2\sqrt{7}}{7}\arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{7}(4x-1)\right)$; (g) $-\frac{2}{3}\ln|x+1| + \frac{5}{3}\ln|x-2|$; (h) $\arcsin\frac{x}{a}$; (i) $\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$;
 (j) $\frac{3}{2}\ln(x^2+9) - \frac{7}{3}\arctan\frac{x}{3}$; (k) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{3}\ln(\sqrt[4]{x^3}+1)$; (l) $\frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\tan\frac{x}{2}\right)$;
 (m) $\arctan\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)$; (n) $x + \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\arctan x$; (o) $x\ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$;
 (p) $2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x})$; (q) $\frac{1}{3}\sqrt{(a^2+x^2)^3}$; (r) $\ln|\tan\frac{x}{2}|$.
6. (a) $f(x) = x^3 + \ln|x| + 1$; (b) $f(x) = \frac{x^4}{4} + x\ln|x| - x - e^3x + e^3 + \frac{11}{4}$.



Exercícios

4. Cálculo integral em \mathbb{R} .

1. Calcule os integrais e interprete graficamente o resultado:

$$(a) \int_1^2 \frac{1}{x} dx; \quad (b) \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x dx; \quad (c) \int_{-1}^1 \sqrt[3]{x} dx; \quad (d) \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx.$$

2. Calcule os seguintes integrais:

$$\begin{array}{lll} (a) \int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx; & (h) \int_{-1}^1 \frac{y^5}{y+2} dy; & (o) \int_0^\pi e^x \sin x dx; \\ (b) \int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}) dx; & (i) \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx; & (p) \int_0^4 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx; \\ (c) \int_1^4 \frac{1 + \sqrt{y}}{y^2} dy; & (j) \int_3^4 \frac{1}{x^2 - 3x + 2} dx; & (q) \int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{(x-2)^{\frac{2}{3}} + 3} dx; \\ (d) \int_2^6 \sqrt{x-2} dx; & (k) \int_0^1 \frac{z^3}{z^3 + 1} dz; & (r) \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx; \\ (e) \int_0^{-3} \frac{1}{\sqrt{25 + 3x}} dx; & (l) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx; & (s) \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx; \\ (f) \int_{-2}^{-3} \frac{1}{x^2 - 1} dx; & (m) \int_1^e \ln x dx; & (t) \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx; \\ (g) \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 3x + 2} dx; & (n) \int_0^1 x^3 e^{2x} dx; & (u) \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx. \end{array}$$

3. Calcule, em função de x , os integrais:

$$(a) \int_0^x t dt; \quad (b) \int_x^{x+1} (3 \sin t + 2t^5) dt.$$

4. Indique a relação que existe entre os integrais

$$I = \int_0^a f(x) dx \quad \text{e} \quad J = \int_{-a}^0 f(x) dx$$

nos casos em que:

$$(a) f \text{ é par}; \quad (b) f \text{ é ímpar}.$$

5. Mostre que $\int_1^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ para qualquer $x > 0$.

6. Mostre que $\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

7. Mostre que $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \int_e^{e^x} \frac{1}{\ln s} ds$ para qualquer $x > 0$.

8. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e periódica de período T . Mostre que

$$F(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt$$

é uma função constante em \mathbb{R} .

9. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos locais das funções:

(a) $F(x) = \int_1^x \ln t dt;$

(c) $H(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt;$

(b) $G(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4} dt;$

(d) $I(x) = \int_2^{e^x} \frac{1}{\ln t} dt.$

10. Seja $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e não nula para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_1^{x^2} th(t) dt.$$

Mostre que f tem um extremo local no ponto $x = 0$. Deduza uma condição para h de modo a que f tenha um mínimo local no ponto $x = 0$.

11. Calcule os integrais impróprios:

(a) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx;$

(e) $\int_0^1 x \ln^2 x dx;$

(b) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2} dx;$

(f) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} dx;$

(c) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+1} dx;$

(g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx.$

(d) $\int_0^2 \frac{x^5}{\sqrt{4-x^2}} dx;$

12. Diga se convergem ou divergem os seguintes integrais impróprios:

(a) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx;$

(e) $\int_0^1 \frac{1}{x - \tan x} dx;$

(b) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^3}} dx;$

(f) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx;$

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{x \arctan x}{\sqrt{1+x^3}} dx;$

(g) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$

(d) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^3+x^2+x+1} dx;$

13. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \int_x^{x^2} e^{t^2} \sin t dt.$

14. Determine todas as funções diferenciáveis $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com derivada contínua e não nula, tais que

$$f(f(x)) = 6 + \int_0^x f'(f(t)) dt.$$

(Sugestão: utilize a regra de Leibnitz.)

15. Calcule $\int_0^1 \frac{1}{1+f(x)} dx$ onde $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, é contínua, positiva e tal que $f(x)f(1-x) = 1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. (Sugestão: faça a substituição $x = 1 - t$.)

16. Calcule a área dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^2 :

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 5, y \geq -5x + 5, y \geq \ln x\}$;

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq -x^2 + 2\}$;

(c) $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \frac{1}{2}x - 1 \right\}$;

(d) $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq 2 - x^2, y^2 \geq -x, x \leq \frac{|y|}{2} + \frac{1}{2} \right\}$.

17. Calcule a área das figuras limitadas por:

(a) $y = 4x - x^2$ e pelo eixo dos xx ;

(b) $y = \ln x$, pelo eixo dos xx e pela recta $x = e$;

(c) $y = x(x-1)(x-2)$ e pelo eixo dos xx ;

(d) $y^3 = x$ e pelas rectas $y = 1$ e $x = 8$;

(e) $y = x^2$ e pela recta $y = 3 - 2x$;

(f) $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ e pela recta $y = 2x$;

(g) $y = \frac{1}{1+x^2}$ e por $y = \frac{x^2}{2}$;

(h) $y = e^x$, $y = e^{-x}$ e pela recta $x = 1$.

18. Calcule o volume dos sólidos obtidos pela rotação das figuras limitadas por:

(a) $y = x - x^2$ e por $y = 0$, em torno do eixo dos xx ;

(b) $y = \sin^2 x$, por $x = 0$ e por $x = \pi$, em torno do eixo dos xx ;

(c) $y^2 = x^3$, por $y = 0$ e por $x = 1$, em torno do eixo dos xx ;

(d) $y^2 = x^3$, por $y = 0$ e por $x = 1$, em torno do eixo dos yy ;

(e) $y = e^x$, por $x = 0$ e por $y = 0$, em torno do eixo dos xx ;

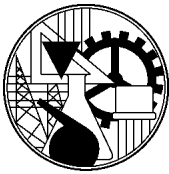
(f) $y = e^x$, por $x = 0$ e por $y = 0$, em torno do eixo dos yy ;

(g) $y^2 = 4x$ e por $x = 1$, em torno do eixo dos yy ;

(h) $y = x^2$ e por $y = \sqrt{x}$, em torno do eixo dos xx .

Soluções.

1. (a) $\ln 2$; (b) $-\frac{1-\ln 2}{2}$; (c) 0; (d) 1.
2. (a) $\frac{7}{3}$; (b) $\frac{100}{3}$; (c) $\frac{7}{4}$; (d) $\frac{16}{3}$; (e) $-\frac{2}{3}$; (f) $\frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}$; (g) $\ln \frac{9}{8}$; (h) $35 + \frac{1}{15} - 32 \ln 3$;
(i) $\arctan 3 - \arctan 2$; (j) $\ln \frac{4}{3}$; (k) $\frac{\pi}{16}$; (l) $\frac{\pi}{2} - 1$; (m) 1; (n) $\frac{e^2+3}{8}$; (o) $\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$; (p) $4 - 2 \ln 3$;
(q) $8 - \frac{9}{2\sqrt{3}}$; (r) $2 - \frac{\pi}{2}$; (s) $1 - \frac{\pi}{4}$; (t) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$; (u) $4 - \pi$.
3. (a) $\frac{x^2}{2}$; (b) $\frac{1}{3}((x+1)^6 - x^6) - 3(\cos(x+1) - \cos x)$.
4. (a) $I = J$; (b) $I = -J$.
- 4c. (a) $D =]0, +\infty[$, decrescente em $]0, 1[$, crescente em $]1, +\infty[$, mínimo local em $x = 1$;
(b) $D = \mathbb{R}$, decrescente em \mathbb{R} ; (c) $D = \mathbb{R}$, decrescente em $] - \infty, 0[$, crescente em $]0, +\infty[$,
mínimo local em $x = 1$; (d) $D =]0, +\infty[$, crescente em $]0, +\infty[$.
12. $h(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$.
13. (a) $\frac{1}{2}$; (b) $\frac{\pi^2}{8}$; (c) $\frac{\pi}{2}$; (d) $\frac{256}{15}$; (e) $\frac{1}{4}$; (f) 4; (g) $\frac{\pi}{6}$.
14. (a) divergente; (b) convergente; (c) divergente; (d) divergente; (e) divergente; (f) convergente; (g) convergente.
15. $-\frac{1}{2}$.
14. $f(x) = x + 3$.
15. $\frac{1}{2}$.
16. (a) $e^5 - \frac{7}{2}$; (b) $\frac{9}{2}$; (c) $\frac{1}{2} \arcsin \frac{4}{5} - \frac{2}{5}$; (d) $\frac{25}{6} + \pi$.
17. (a) $\frac{32}{3}$; (b) 1; (c) $\frac{1}{2}$; (d) $4 + \frac{1}{4}$; (e) $10 + \frac{2}{3}$; (f) 4; (g) $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$; (h) $e + \frac{1}{e} - 2$.
18. (a) $\frac{\pi}{30}$; (b) $\frac{3\pi^2}{8}$; (c) $\frac{\pi}{4}$; (d) $\frac{4\pi}{7}$; (e) $\frac{\pi}{2}$; (f) 2π ; (g) $\frac{16\pi}{5}$; (h) $\frac{3\pi}{10}$.



Exercícios

5. Séries numéricas.

1. Calcule, caso existam, os limites das seguintes sucessões:

(a) $\frac{2^{n+1} + 3^n}{2^n + 3^{n+1}}$;

(b) $\sqrt[n]{\frac{1}{n^3}}$;

(c) $\frac{\sqrt[n]{2} - 1}{n - 1}$;

(d) $\sqrt[n]{a^n + b^n}$ com $0 < a \leq b$;

(e) $\cos(n\pi) \sin(n\pi)$;

(f) $\cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}$;

(g) $\left(\frac{n}{1+n}\right)^{\frac{1}{n}}$;

(h) $\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n$;

(i) $\frac{n^e}{1 - n^e}$;

(j) $\frac{e}{n} \cos \frac{\pi}{n}$;

(k) $\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^n$;

(l) $\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}$;

(m) $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n + \frac{1}{3}}$;

(n) $\left(\frac{3n+4}{3n-2}\right)^{\frac{n}{4}}$;

(o) $1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n n}{2n+1}$;

(p) $\cos(n\pi) + (-1)^{n+1}$;

(q) $\cos \frac{n\pi}{4}$.

2. Determine para que valores de x convergem as séries e calcule a sua soma:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n$;

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$;

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} n^{|x|}$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - |x|)^n$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2 + n}$;

3. O herói grego Aquiles vai fazer uma corrida com uma tartaruga. Aquiles dá um avanço de $h > 0$ metros à tartaruga. Admitindo que partiram os dois no mesmo instante e que têm velocidades V, v metros por segundo, respectivamente, com $V > v > 0$, calcule o espaço percorrido pela tartaruga desde a sua partida até ser ultrapassada por Aquiles.

4. Utilize a teoria das séries geométricas para calcular os racionais correspondentes às dízimas:

(a) 3.666...;

(c) 1.181818...;

(b) 1.571428571428571428...;

(d) 0.999....

5. Determine a natureza das seguintes séries e a soma das que são convergentes:

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-3)(2n-1)}$;

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-(3n+1)}$;

- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$;
- (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n-2}} + \frac{3}{2^n} \right)$;
- (f) $\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \frac{1}{15 \cdot 19} + \dots$;
- (g) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} \right) + \dots$.

6. Mostre que se $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ é divergente.

7. Estude quanto à convergência simples e absoluta as séries de termos gerais:

- (a) $\frac{(-1)^n}{n + \ln n}$; (c) $(-1)^n \frac{n}{n+2}$; (f) $(-1)^n \frac{\ln n}{n}$;
- (b) $(-1)^n \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n}$; (d) $\cos(\pi n)$;
- (e) $(-1)^n (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n})$; (g) $(-1)^n \tan \frac{1}{n}$.

8. Mostre que se $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e b_n é uma sucessão limitada, então

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \text{ é convergente.}$$

9. Justifique se são verdadeiras ou falsas as seguintes proposições:

- (a) Um número inteiro pode ser a soma de uma série geométrica de racionais.
- (b) Um número irracional pode ser a soma de uma série geométrica de racionais.
- (c) A soma de dois irracionais é um irracional.
- (d) Se $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ é convergente.
- (e) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ é convergente.
- (f) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge, também $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ converge.
- (g) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente e $a_n \neq -1 \forall n \in \mathbb{N}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ é também absolutamente convergente.
- (h) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries convergentes de termos positivos então $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n b_n}$ é convergente.

10. Determine a natureza das séries cujos termos gerais são:

- | | | |
|--|--|---|
| (a) $\frac{n}{n^2 + n - 1}$; | (h) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$; | (p) $\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$; |
| (b) $\frac{1}{\sqrt{n(n+10)}}$; | (i) $\frac{(1000)^n}{n!}$; | (q) $\frac{1+3n}{2\sqrt{n}(n^2-1)}$; |
| (c) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; | (j) $\frac{n}{\sin n}$; | (r) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n+3)}$; |
| (d) $\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$; | (k) $n^2 e^{-\sqrt{n}}$; | (s) $\frac{n^{1000}}{(1.001)^n}$; |
| (e) $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$; | (l) $n^2 \sin \frac{\pi}{2n}$; | (t) $\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$; |
| (f) $\frac{2^n}{1+3^n}$; | (m) $(1 + (-1)^n)^n$; | (u) $\frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2 + 1}$; |
| (g) $\frac{1}{n^2 \sin \frac{1}{n}}$; | (n) $\frac{e^n n!}{n^n}$; | (v) $\left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \ln n}$. |
| | (o) $\frac{1}{(\ln n)^p}$, p fixo; | |

11. Determine com erro inferior a 0.01 a soma das séries:

- | | | |
|--|---|--|
| (a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$; | (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{n}{2}}}$; | (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. |
|--|---|--|

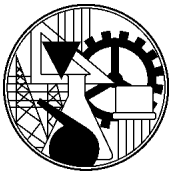
12. Mostre que:

- (a) A sucessão $x_n = \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ é uma sucessão de termos positivos que tende para zero.
- (b) A série $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n x_n$ é divergente.

Porque é que não se aplica à série anterior o critério de Leibniz?

Soluções.

1. (a) $\frac{1}{3}$; (b) 1; (c) 0; (d) b ; (e) 0; (f) 0; (g) 1; (h) $+\infty$; (i) -1 ; (j) 0; (k) 0; (l) $\frac{1}{2}$; (m) $\frac{1}{2}$;
(n) \sqrt{e} ; (o) não existe; (p) 0; (q) não existe.
2. (a) $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$, soma = $x + 1$; (b) $x \in]-2, 2[\setminus\{0\}$, soma = $\frac{1}{|x|}$; (c) $x = 0$, soma = 0;
(d) $x \in \mathbb{R}$, soma = x ; (e) divergente para qualquer valor de x .
3. $E = \frac{vh}{V} + \frac{v^2h}{V^2} + \frac{v^3h}{V^3} + \dots = \frac{vh}{V-v}$.
4. (a) $\frac{11}{3}$; (b) $\frac{5291}{3367}$; (c) $\frac{13}{11}$; (d) 1.
5. (a) convergente, soma = $\frac{3}{4}$; (b) convergente, soma = $-\frac{1}{2}$; (c) convergente, soma = $\frac{4}{7}$; (d) divergente; (e) convergente, soma = 14; (f) convergente, soma = $\frac{1}{12}$; (g) divergente.
- 4c. (a) simplesmente convergente; (b) simplesmente convergente; (c) divergente;
(d) divergente; (e) divergente; (f) simplesmente convergente; (g) simplesmente convergente.
12. (a) verdadeiro: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$; (b) falso; (c) falso;
(d) verdadeiro: $\sum a_n$ conv. $\Rightarrow a_n \rightarrow 0 \Rightarrow a_n < 1, n \geq p \Rightarrow a_n^2 < a_n, n \geq p \Rightarrow \sum a_n^2$ conv.;
(e) verdadeiro: $\frac{\frac{a_n^2}{1+a_n^2}}{|a_n|} = \frac{|a_n|}{1+a_n^2} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{|a_n|}{1+a_n^2} < 1, n \geq p \Rightarrow \frac{a_n^2}{1+a_n^2} < |a_n|, n \geq p \Rightarrow \sum \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$ conv.;
(f) verdadeiro: mostre que se $x, y \geq 0$ então $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, e faça $x = a_n^2$ e $y = \frac{1}{n^2}$;
(g) verdadeiro: ver (e); (h) verdadeiro: ver (f).
13. (a) divergente; (b) divergente; (c) divergente; (d) divergente; (e) convergente;
(f) convergente; (g) divergente; (h) convergente; (i) convergente; (j) divergente;
(k) convergente; (l) convergente; (m) divergente; (n) divergente; (o) divergente;
(p) convergente; (q) convergente; (r) convergente; (s) convergente; (t) divergente;
(u) convergente; (v) convergente.
14. (a) $\sum_{n=1}^{10} (-1)^n \frac{1}{n^2}$; (b) $\sum_{n=1}^5 \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$; (c) $\sum_{n=1}^7 \frac{n!}{n^n}$.



Exercícios

6. Séries de potências.

1. Estude a convergência pontual das seguintes séries de funções:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx^2}$ em $[-a, a]$ com $0 < a < 1$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{3^n}$ em $]-\infty, b]$ com $b < \ln 3$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2 x^2}}{n^2}$ em \mathbb{R} ; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}$ em \mathbb{R} .

2. Considere a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n + x^2}$.

(a) Mostre que é pontualmente convergente em \mathbb{R} .

(b) Mostre que não é absolutamente convergente para cada $x \in \mathbb{R}$.

3. Calcule o raio de convergência e indique os valores de x para os quais as seguintes séries de potências são simplesmente convergentes e absolutamente convergentes.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} n! n^{-n} x^n$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 2^n}$;
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^{2n+1}}{\sqrt{n}}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^{2n}}{3^n}$; (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

4. Calcule o domínio e uma expressão finita em função de x para as séries:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} n x^{2n}$.

(Sugestão: derive ou primitive, some, e primitive ou derive.)

5. Calcule a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$. (Sugestão: utilize o resultado de 4c.)

6. Represente por uma série de potências de x as seguintes funções, indicando o maior intervalo onde é válida essa representação.

(a) $\frac{1}{x-2}$; (d) e^{1-x} ; (g) $\frac{1}{x(x-2)}$;
(b) $\frac{1}{x^2-3x+2}$; (e) $\ln(1+x)$; (h) $\arctan x$;
(c) $\frac{1}{(1+x)^2}$; (f) $\int_0^x e^{-t^2} dt$; (i) $\ln(2+x^2)$.

7. Represente a função $f(x) = \frac{1}{x}$ por uma série de potências de $x - 1$. (Sugestão: note que $x = 1 - (1 - x)$.)
8. Use a fórmula de Taylor para escrever o polinómio $x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ como soma de potências de $x + 2$.
9. Considere a função $f(x) = 2 \ln \cos x$.
- Determine o polinómio de Taylor de 2º grau que melhor aproxima $f(x)$ numa vizinhança de $x = 0$.
 - Prove que o valor absoluto da diferença entre $f(x)$ e o polinómio da alínea anterior é inferior a $\frac{4}{3}x^3$ para $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
10. Um cabo pesado suspenso sob a acção da gravidade toma a forma do gráfico da função $y = a \cosh \frac{x}{a}$, onde $a > 0$ é uma constante. Mostre que para $|x|$ pequeno a forma do gráfico é aproximadamente a da parábola de equação $y = a + \frac{x^2}{2a}$.
11. Mostre que $\sin(a + h)$ difere de $\sin a + h \cos a$ por uma quantidade inferior a $\frac{h^2}{2}$, para $h > 0$.
12. Utilize a fórmula de Taylor para obter $\sin \frac{\pi}{18}$ com erro inferior a 10^{-4} .
13. Utilize a fórmula de Taylor para calcular $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ com erro inferior a $\frac{1}{500}$.
14. Considere a função $f(x) = \sin(\sin x)$.
- Obtenha o polinómio de Taylor de 2º grau no ponto $x = 0$ para $f(x)$.
 - Utilize a alínea anterior para calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin x^3) - x^3}{x^6}$.
15. Considere a função $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$.
- Determine uma primitiva de $f(x)$ no intervalo $] -\infty, 1[$.
 - Utilize a alínea anterior para mostrar que a função $\frac{x}{(1-x)^2}$ é analítica no ponto $x = 0$.

Soluções.

1. (a) converge pontualmente; (b) converge pontualmente; (c) converge pontualmente;
(d) o domínio não é sempre o mesmo.
2. (a) Critério de Leibnitz; (b) Critério da comparação.
3. (a) $R = 1$, absolutamente convergente em $[-1, 1]$, simplesmente convergente em \emptyset ;
(b) $R = 1$, absolutamente convergente em $] - 1, 0[$, simplesmente convergente em \emptyset ;
(c) $R = e$, absolutamente convergente em $] - e, e[$, simplesmente convergente em \emptyset ;
(d) $R = \sqrt{3}$, absolutamente convergente em $] - 1 - \sqrt{3}, -1 + \sqrt{3}[$, simplesmente convergente em \emptyset ;
(e) $R = 2$, absolutamente convergente em $] - 2, 2[$, simplesmente convergente em $\{-2\}$;
(f) $R = 1$, absolutamente convergente em $] - 1, 1[$, simplesmente convergente em \emptyset .
4. (a) $\frac{1}{(1-x)^2}, x \in] - 1, 1[$; (b) $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, x \in] - 1, 1[$; (c) igual a (a); (d) $\frac{x^2}{(1-x)^2}, x \in] - 1, 1[$.
5. 4
6. (a) $-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n,] - 2, 2[$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{2^{n+1}}) x^n,] - 1, 1[$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1},] - 1, 1[$;
(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e(-1)^n}{n!} x^n,] - \infty, +\infty[$; (e) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},] - 1, 1[$;
(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1},] - \infty, +\infty[$; (g) $-\frac{1}{2x} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^{n-1},] 0, 2[$ ou $] - 2, 0[$;
(h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^{2n+1}, [-1, 1[$; (i) $\ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(2n+2)} x^{2n+2}, [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.
7. $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n,] 0, 2[$.
8. $-8 + 15(x+2) - 8(x+2)^2 + (x+2)^3$.
9. (a) $p_2(x) = -x^2$.
12. $\sin \frac{\pi}{18} \simeq \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{18}\right)^3$.
13. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \simeq \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6}\right) dx = \frac{17}{18}$.
14. (a) x ; (b) 0.
15. (a) $\frac{1}{1-x}$; (b) $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ em $] - 1, 1[$.