ISEL

Análise Matemática I

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução do Exame 2 - 14/02/2006

---

1. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \arctan(x) + 2 & , x \leq 0 \\ Ax + B & , 0 < x < \mathrm{e} \\ \ln(x^3) & , x \geq \mathrm{e} \end{cases}$$

(a) Determine valores para A e B, de forma a que a função f seja contínua em $x = 0$ e descontínua em $x = \mathrm{e}$.

Resolução. A função f é contínua em $x = 0$ se $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

Vamos estudar os limites laterais:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (\arctan(x) + 2) = 2,$$
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (Ax + B) = B.$$

Logo f é contínua em 0 se $B = 2$.

Por outro lado, para a função f ser descontínua em $x = \mathrm{e}$, é necessário, ou que não exista $\lim\limits_{x \to \mathrm{e}} f(x)$, ou, se este limite existir, que $\lim\limits_{x \to \mathrm{e}} f(x) \neq f(\mathrm{e})$.

Como

$$\lim_{x \to \mathrm{e}^-} f(x) = \lim_{x \to \mathrm{e}^-} (Ax + B) = \lim_{x \to \mathrm{e}^-} (Ax + 2) = A\mathrm{e} + 2,$$
$$\lim_{x \to \mathrm{e}^+} f(x) = \lim_{x \to \mathrm{e}^+} \ln(x^3) = 3 = f(\mathrm{e}),$$

para que não exista $\lim\limits_{x \to \mathrm{e}} f(x)$, é necessário que os limites laterais sejam diferentes, ou seja, que

$$A\mathrm{e} + 2 \neq 3 \Longleftrightarrow A \neq \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

(b) Sem efectuar qualquer cálculo, diga, para os valores de A e B que obteve em (a), se f é diferenciável em $x = \mathrm{e}$.

Resolução. A função f não é diferenciável em $x = \mathrm{e}$, uma vez que não é contínua em $x = \mathrm{e}$.

2. Mostre que a função $g(x) = \dfrac{1}{x} + \cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$ tem pelo menos um zero no intervalo $]0, 4]$. (Sugestão: utilize o Teorema de Bolzano.)

Resolução. A função $g(x) = \dfrac{1}{x} + \cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$ é contínua no seu domínio $D = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} + \cos\left(\dfrac{\pi x}{4}\right) = +\infty$, existe pelo menos um ponto $a > 0$, suficientemente próximo de $x = 0$, tal que $g(a) > 0$.

Por outro lado, $g(4) = -\dfrac{3}{4} < 0$. Aplicando o Teorema de Bolzano à função g no intervalo $[a, 4]$, conclui-se que g tem pelo menos um zero no intervalo $[a, 4]$. Logo a função g tem pelo menos um zero no intervalo $]0, 4]$.

3. Determine os extremos da função $f(x) = x^2 \mathrm{e}^x$.

Resolução. A derivada da função f é dada por $f'(x) = (2x + x^2)\mathrm{e}^x$. Recorrendo a um quadro de sinais,

	$-\infty$	-2		0	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

conclui-se que a função f tem um máximo relativo em $x = -2$ e um mínimo relativo em $x = 0$.

4. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e seja $h(x) = f(x\ln(x))$. Sabendo que $f(0) = \sqrt{3}$ e que $f'(0) = 2$, escreva a equação da recta tangente à função h em $x = 1$.

Resolução. Como a função f é diferenciável em $\mathbb{R}$, a funçãao $h = f(x\ln(x))$ é diferenciável no seu domínio.

Utilizando a regra da derivação da função composta, obtém-se

$$h'(x) = \big(f(x\ln(x))\big)' = f'(x\ln(x)) \cdot \big(x\ln(x)\big)' = \big(\ln(x) + 1\big) \cdot f'(x\ln(x))\,.$$

Então

$$\begin{aligned} h(1) &= f(1 \times \ln(1)) = f(0) = \sqrt{3}\,, \\ h'(1) &= \big(\ln(1) + 1\big) \cdot f'(1 \times \ln(1)) = f'(0) = 2, \end{aligned}$$

donde resulta a equação da recta tangente à função h em $x = 1$:

$$\begin{aligned} y &= h'(1)\,(x-1) + h(1) \\ y &= 2\,(x-1) + \sqrt{3}\,. \end{aligned}$$

5. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2(x)}{x^2}$.

Resolução. Aplicando a Regra de Cauchy, obtém-se

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\tan(x)(\tan(x))'}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)\dfrac{1}{\cos^2(x)}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x\cos^2(x)}$$

Aplicando novamente a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x\cos^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\cos^2(x)}}{\cos^2(x) - 2x\cos(x)\sin(x)} = 1.$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t}{x}$.

Resolução. Aplicando a Regra de Cauchy e a Regra de Leibnitz, temos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\displaystyle\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t\right)'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

6. Calcule uma primitiva da função $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4-9x^4}}$.

Resolução. Aplicando a regra do arcoseno,

$$P\frac{x}{\sqrt{4-9x^4}} = P\frac{x}{\sqrt{4\left(1-\dfrac{9x^4}{4}\right)}} = P\frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{1-\left(\dfrac{3x^2}{2}\right)^2}} = P\frac{1}{6}\frac{3x}{\sqrt{1-\left(\dfrac{3x^2}{2}\right)^2}} = \frac{1}{6}\arcsin\left(\frac{3x^2}{2}\right).$$

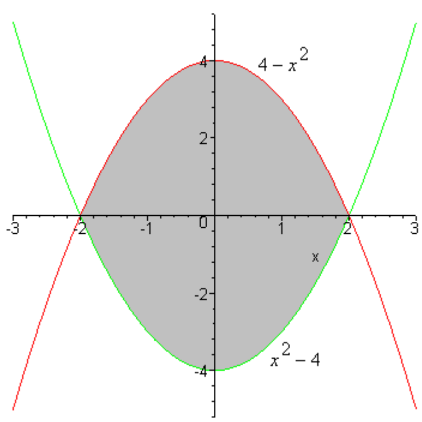
7. Calcule $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{1-\ln x}{x+x\ln x}\,dx$.

Resolução. Utilizando a mudança de variável $\ln x = t$, ou seja, $\varphi(t) = e^t$, vem que $\varphi'(t) = e^t$, $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(2) = e^2$. Então

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} \frac{1-\ln x}{x+x\ln x}\,dx &= \int_0^2 \frac{1-t}{e^t+e^t t}\cdot e^t\,dt = \int_0^2 \frac{1-t}{1+t}\,dt = \int_0^2 \left(-1+\frac{2}{1+t}\right)dt \\ &= \big[-t+2\ln|1+t|\big]_0^2 = -2+2\ln 3+0-2\ln 1 = -2+2\ln 3.\end{aligned}$$

8. Calcule a área da região plana limitada pelas funções $y = x^2-4$ e $y = 4-x^2$.

Resolução. A região plana limitada pelas funções $y = x^2-4$ e $y = 4-x^2$ é a região representada no gráfico seguinte:



Então

$$A = \int_{-2}^{2}(4-x^2-x^2+4)\,dx = 2\int_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx = 2\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2} = \frac{64}{3}.$$

9. Calcule $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

Resolução. Como $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x-1}} = \infty$, o integral é um integral impróprio de 2ª espécie. Assim,

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{c\to 1}\int_c^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \lim_{c\to 1}\big[2\sqrt{x-1}\big]_c^3 = \lim_{c\to 1}\left(2\sqrt{2}-2\sqrt{c-1}\right) = 2\sqrt{2}.$$