

1. Considere a função $f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}}$. Indique o domínio de f e verifique se f é prolongável por continuidade a \mathbb{R} .

Resolução. Quanto ao domínio de f , temos que

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : 1 + e^{\frac{1}{1-x}} \neq 0 \wedge 1 - x \neq 0 \right\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

A função será prolongável por continuidade a \mathbb{R} se existir e for finito o limite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Como

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{0^+}}} = \frac{1}{1 + e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{0^-}}} = \frac{1}{1 + e^{-\infty}} = \frac{1}{1 + 0} = 1,$$

concluimos que f não é prolongável por continuidade.

2. Mostre que, para $0 < a \leq b$, existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\ln \frac{b}{a} = \frac{b-a}{c}.$$

(Sugestão: aplique o Teorema de Lagrange à função $f(x) = \ln x$.)

Resolução. Consideremos a função $f(x) = \ln x$. Como $0 < a \leq b$, vem que $[a, b] \subseteq D_f$, e portanto f é uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, ou seja, tal que

$$\frac{1}{c} = \frac{\ln b - \ln a}{b - a} \Leftrightarrow \frac{1}{c} = \frac{\ln \frac{b}{a}}{b - a} \Leftrightarrow \ln \frac{b}{a} = \frac{b - a}{c}.$$

3. Calcule, se existir, o limite $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

Resolução. Temos que $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = 1^\infty$, que é uma indeterminação. Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}},$$

calculemos $\ln \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

$$\begin{aligned} \ln \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x^2} \ln \cos 2x = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2} \quad \frac{0}{0} \\ &\stackrel{R.C.}{=} 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{2 \sin 2x}{\cos 2x}}{2x} = -3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x \cos 2x} \quad \frac{0}{0} \\ &\stackrel{R.C.}{=} -3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2x}{\cos 2x - 2x \sin 2x} \\ &= -3 \cdot 2 = -6. \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = e^{-6}.$$

4. Seja $h(x) = f(e^{\cos x})$, com f duas vezes diferenciável e estritamente decrescente em \mathbb{R} . Calcule $h'(x)$, e verifique que h tem um extremo local em $x = 0$.

Resolução. Pela regra da derivada da função composta,

$$h'(x) = (e^{\cos x})' \cdot f'(e^{\cos x}) = -\sin x \cdot e^{\cos x} \cdot f'(e^{\cos x}).$$

Como $h'(0) = 0$, $x = 0$ é um ponto crítico de f . Para verificar se h tem um extremo local neste ponto, estudemos o sinal de $h'(x)$ numa vizinhança $[-\varepsilon, \varepsilon]$ de 0. Como f é estritamente decrescente em \mathbb{R} , sabemos que $f' < 0$ em \mathbb{R} . Portanto,

	$-\varepsilon$		0		ε
$-\sin x$	+	+	0	-	-
$e^{\cos x}$	+	+	+	+	+
$f'(e^{\cos x})$	-	-	-	-	-
$h'(x)$	-	-	0	+	+
$h(x)$	\searrow	\searrow	m	\nearrow	\nearrow

Logo, h tem um mínimo local em $x = 0$.

5. Calcule todas as primitivas das seguintes funções:

(a) $\frac{\sqrt{x+1}}{1+x+\sqrt[4]{(x+1)^3}}$.

Resolução. Temos que

$$\frac{\sqrt{x+1}}{1+x+\sqrt[4]{(x+1)^3}} = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{1+x+(x+1)^{\frac{3}{4}}}.$$

O mínimo múltiplo comum dos denominadores dos expoentes, $m.m.c.(2, 4) = 4$, sugere a mudança de variável: $x+1 = t^4$. Então $x'(t) = 4t^3$, e

$$P \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{1+x+(x+1)^{\frac{3}{4}}} = P \frac{t^2}{t^4+t^3} \cdot 4t^3 = P \frac{4t^5}{t^4+t^3} = 4P \frac{t^2}{t+1}.$$

Dividindo os polinômios,

$$\begin{array}{r} t^2 \\ -t^2 \quad -t \\ \hline 0 \quad -t \\ \quad t \quad 1 \\ \quad -t \quad -1 \\ \hline 0 \quad 1 \end{array}$$

obtem-se $\frac{t^2}{t+1} = t - 1 + \frac{1}{t+1}$. Assim,

$$\begin{aligned} P \frac{\sqrt{x+1}}{1+x+\sqrt[4]{(x+1)^3}} &= 4P \left(t - 1 + \frac{1}{t+1} \right) = \\ &= 4 \left(\frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1| + c \right) = \\ &= 2(x+1)^{\frac{1}{2}} - 4(x+1)^{\frac{1}{4}} + 4 \ln \left| (x+1)^{\frac{1}{4}} + 1 \right| + c, \end{aligned}$$

onde c é uma constante.

(b) $f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + x + 6}{x^3 + x}$.

Resolução. A função $f(x) = \frac{x^4 + 3x^2 + x + 6}{x^3 + x}$ é uma função racional. Dividindo os polinômios,

$$\begin{array}{r} x^4 + 3x^2 + x + 6 \quad | \quad x^3 + x \\ -x^4 \quad -x^2 \\ \hline 0 \quad +2x^2 + x + 6 \end{array}$$

obtém-se que

$$P \frac{x^4 + 3x^2 + x + 6}{x^3 + x} = P \left(x + \frac{2x^2 + x + 6}{x^3 + x} \right).$$

O denominador $x^3 + x = x(x^2 + 1)$ tem uma raiz real, de multiplicidade 1, e duas raízes complexas. Assim,

$$\frac{2x^2 + x + 6}{x^3 + x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}.$$

Somando as frações do membro direito e igualando os numeradores, vem que

$$2x^2 + x + 6 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)x = (A + B)x^2 + Cx + A,$$

e obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ C = 1 \\ A = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 6 \\ B = -4 \\ C = 1 \end{cases}.$$

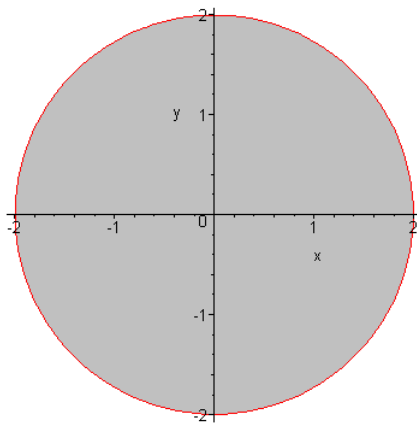
Assim,

$$\begin{aligned} P \frac{x^4 + 3x^2 + x + 6}{x^3 + x} &= P \left(x + \frac{6}{x} + \frac{-4x + 1}{x^2 + 1} \right) = \\ &= \frac{x^2}{2} + 6 \ln|x| - 2P \frac{2x}{x^2 + 1} + P \frac{1}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{x^2}{2} + 6 \ln|x| - 2 \ln(x^2 + 1) + \arctan(x) + c, \end{aligned}$$

com $c \in \mathbb{R}$.

6. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo dos xx da superfície S limitada por $x^2 + y^2 = 4$.

Resolução. S é a região do plano limitada pela circunferência de centro em $(0,0)$ e raio 2.



Rodando o círculo S em torno do eixo dos xx , obtém-se uma esfera, cujo volume é dado por

$$V = \pi \int_{-2}^2 y^2 dx = \pi \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \pi \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{32\pi}{3}.$$

7. Considere a função $F(x) = \int_0^x t e^{-t} dt$.

(a) Mostre que $F(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Resolução. Se $x \geq 0$, $te^{-t} \geq 0$ para todo $t \in [0, x]$, então $F(x) = \int_0^x te^{-t} dx \geq 0$, para todo $x \in [0, +\infty[$. Se $x < 0$, $te^{-t} \leq 0$ para todo $t \in [x, 0]$. Então $\int_x^0 te^{-t} dx \leq 0$, e $F(x) = \int_0^x te^{-t} dx = -\int_x^0 te^{-t} dx \geq 0$, para todo $x \in]-\infty, 0[$. Assim, $F(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Note-se que $F(x) = 0$ se e só se $x = 0$.

Resolução. Pela Regra de Leibnitz, $F'(x) = xe^{-x}$. Logo, $F''(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$.

	$-\infty$	1	$+\infty$
$1 - x$	+	0	-
e^{-x}	+	e	+
F''	+	0	-
F	\cup	<i>PI</i>	\cap

Então F tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, 1[$, voltada para baixo em $]1, +\infty[$ e $x = 1$ é um ponto de inflexão de F .

(b) Mostre que a recta $y = 1$ é a única assíntota horizontal de F .

Resolução. Vamos estudar o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_0^{+\infty} te^{-t} dt.$$

Utilizando a técnica de primitivação por partes, obtém-se que

$$P te^{-t} = -te^{-t} + P e^{-t} = -te^{-t} - e^{-t} = -(1 + t)e^{-t}.$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x te^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [- (1 + t)e^{-t}]_0^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -(1 + x)e^{-x} + 1 = 1.$$

Logo, a recta $y = 1$, é assíntota horizontal de F quando $x \rightarrow +\infty$. Por outro lado,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_0^x te^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} [- (1 + t)e^{-t}]_0^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} -(1 + x)e^{-x} + 1 = +\infty.$$

Logo $y = 1$ é a única assíntota horizontal de F