

Análise Matemática I

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução do Teste 1 — 4 de Novembro de 2005

1. (a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0 \wedge \sqrt{x^2 - 1} \neq 0\} =]-\infty, -1[\cup]1, \infty[.$
- (b) f é contínua porque é o quociente de duas funções contínuas: um polinómio de grau 1 e a raiz quadrada de um polinómio de grau 2, e porque o domínio de f é um conjunto aberto.
- (c) O ponto $x = 1$ não pertence ao domínio da função f . Para prolongar por continuidade a função f a este ponto, é necessário que o limite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ exista e seja um número real.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{x^2-1}}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{x^2-1}}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1} = 0$$

Assim é possível definir a função \bar{f} , que é o prolongamento contínuo de f ao ponto 1:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} & \text{se } x \in D_f, \\ 0 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

2. A função g é diferenciável em $]0, +\infty[$ porque é uma função trigonométrica e este conjunto é aberto. É diferenciável em $] -\infty, 0[$ para quaisquer valores de a e b , porque é uma função polinomial e este conjunto é aberto. Para g ser diferenciável no ponto 0, é necessário que seja contínua nesse ponto, ou seja, que $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$. Vamos estudar os limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^2 + b) = b = g(0) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \cos(x) = 1.$$

Assim para que g seja contínua no ponto 0, é necessário que $b = 1$. g será diferenciável em 0 se o seguinte limite existir e for finito:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x}.$$

Utilizando a Regra de Cauchy, obtém-se $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{1} = 0$.

Por outro lado, $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^2 + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} ax = 0$, para qualquer valor de a .

Conclui-se que g é diferenciável para todo $a \in \mathbb{R}$ e para $b = 1$.

3. (a) Como f é diferenciável, $e^x f(x)$ também é diferenciável porque é um produto de funções diferenciáveis, e $\ln(e^x f(x))$ é diferenciável por ser a composta de duas funções diferenciáveis. $f(-2x)$ também é composta de funções diferenciáveis. Assim $h(x) = f(-2x) + \ln(e^x f(x))$ é diferenciável por ser a soma de funções diferenciáveis.

Utilizando a regra da derivação da função composta, obtém-se

$$h'(x) = (-2x)' f'(-2x) + \frac{(e^x f(x))'}{e^x f(x)} = -2 f'(-2x) + \frac{e^x f(x) + e^x f'(x)}{e^x f(x)}.$$

- (b) Equação da recta tangente ao gráfico de h no ponto $x = 0$: $y = h'(0)x + h(0)$.
 Equação da recta ortogonal ao gráfico de h no ponto $x = 0$: $y = -\frac{1}{h'(0)}x + h(0)$.

$$h(0) = f(0) + \ln(f(0)) = 2 + \ln(2)$$

$$h'(0) = -2f'(0) + \frac{f(0) + f'(0)}{f(0)} = -2 + \frac{2+1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Equação da recta tangente ao gráfico de h no ponto $x = 0$: $y = -\frac{1}{2}x + 2 + \ln(2)$.

Equação da recta ortogonal ao gráfico de h no ponto $x = 0$: $y = 2x + 2 + \ln(2)$.

4. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ for uma função diferenciável tal que $f(0) = 2$, $f(2) = 5$. Então f é contínua em $[0, 2]$ e diferenciável em $]0, 2[$. Aplicando o Teorema de Lagrange a f no intervalo $[0, 2]$, conclui-se que existe pelo menos um $c \in]0, 2[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{5 - 2}{2} = \frac{3}{2} > 1.$$

Logo não existe nenhuma função diferenciável em \mathbb{R} tal que $f(0) = 2$, $f(2) = 5$ e $f'(x) \leq 1$ para todo x em $]0, 2[$.

5. Aplicando a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x \arctan(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{x}{1+x^2} + \arctan(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x + (1+x^2) \arctan(x)}$$

Aplicando novamente a Regra de Cauchy,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x + (1+x^2) \arctan(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1 + \frac{1+x^2}{1+x^2} + 2x \arctan(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{2 + 2x \arctan(x)} = 1.$$

6. (a) O polinómio de Taylor do 2º grau de f no ponto $a = 0$ é $p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$.

$$f(x) = \sqrt[3]{1+2x} \quad f'(x) = \frac{2}{3}(1+2x)^{-\frac{2}{3}} \quad f''(x) = -\frac{8}{9}(1+2x)^{-\frac{5}{3}}$$

$$f(0) = 1 \quad f'(0) = \frac{2}{3} \quad f''(0) = -\frac{8}{9}$$

Assim $p_2(x) = 1 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{9}x^2$.

- (b) $\sqrt[3]{1.2} = f(0,1) \approx p_2(0,1) = 1 + \frac{2}{3} \times 0,1 - \frac{4}{9} \times 0,1^2 = \frac{239}{225}$.