



1. Seja f a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - ax + b & \text{se } x \leq 0 \\ \ln(x + e) & \text{se } 0 < x < e \\ e + x & \text{se } x > e \end{cases}$$

onde a e b são constantes.

- (a) Indique o domínio de f . Esta função é prolongável por continuidade ao ponto $x = e$? Justifique.
 (b) Determine a e b de modo a que f seja diferenciável em $x = 0$.

Resolução.

- (a) O domínio do primeiro ramo de f é $]-\infty, 0]$, o do segundo ramo é

$$\{x \in \mathbb{R} : x + e > 0 \wedge 0 < x < e\} =]0, e[,$$

e o do terceiro ramo é $]e, +\infty[$. Logo, o domínio de f é $D = \mathbb{R} \setminus \{e\}$.

Esta função será prolongável por continuidade ao ponto $x = e$ se existir e for finito o limite $\lim_{x \rightarrow e} f(x)$. Estudemos os limites à esquerda e à direita neste ponto:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow e^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow e^-} \ln(x + e) = \ln 2e \\ \lim_{x \rightarrow e^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow e^+} (e + x) = 2e \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow e^+} f(x)$, concluímos que $\lim_{x \rightarrow e} f(x)$ não existe, e portanto f não é prolongável por continuidade a este ponto.

- (b) Para que f seja diferenciável em $x = 0$ é necessário que seja contínua nesse ponto, ou seja, que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0).$$

Ora, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = b$ e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x + e) = 1$, donde $b = 1$.

Para que exista $f'(0)$, temos que ter $f'_e(0) = f'_d(0)$, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Mas

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + e) - 1}{x} \stackrel{R.C. \ x \rightarrow 0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x + e} = \frac{1}{e} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - ax}{x} = -a, \end{aligned}$$

e portanto $a = -\frac{1}{e}$.

2. Seja p uma função real de variável real contínua em $[0, 1]$, tal que $0 < p(x) < 1$. Mostre que existe um ponto $c \in]0, 1[$ para o qual $p(c) = c$. (Sugestão: aplique o Corolário do Teorema de Bolzano a $q(x) = p(x) - x$.)

Resolução. Se p é contínua em $[0, 1]$, então a função $q(x) = p(x) - x$ também é contínua em $[0, 1]$. Temos que $q(0) = p(0) - 0 > 0$ (porque $p(x) > 0$) e $q(1) = p(1) - 1 < 0$ (porque $p(x) < 1$). Logo, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, existe $c \in]0, 1[$ para o qual $q(c) = 0$, ou seja, $p(c) - c = 0 \Leftrightarrow p(c) = c$.

3. Mostre que $\sin b - \sin a = (b - a) \cos c$, para algum $c \in]a, b[$. (Sugestão: aplique o Teorema de Lagrange.)

Resolução. A função $\sin(x)$ é contínua e diferenciável em \mathbb{R} , e portanto é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$. Pelo Teorema de Lagrange, existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\cos c = \frac{\sin b - \sin a}{b - a} \Leftrightarrow \sin b - \sin a = (b - a) \cos c.$$

4. Seja $g(x) = f(\arctan(x))$ com f diferenciável em \mathbb{R} . Sabendo que $f' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 2$, calcule $g'(1)$.

Resolução. Utilizando a regra da derivada da função composta, vem que

$$g'(x) = (\arctan x)' f'(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2} f'(\arctan x).$$

Assim, $g'(1) = \frac{1}{1+1} f'(\arctan 1) = \frac{1}{2} f' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$.

5. Calcule, caso exista, o limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

Resolução.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &\stackrel{\infty-\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} \stackrel{\frac{0}{0}}{R.C.} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1}{\ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

6. Considere a função $f(x) = 1 - \ln(x - 3)^2$. Determine:

- As assíntotas ao gráfico de f .
- O ponto em que a recta ortogonal ao gráfico de f é paralela à recta $y = -x$.
- Os extremos relativos de f .
- O sentido das concavidades de f e os seus pontos de inflexão.

Resolução.

- (a) O domínio de f é $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Como $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (1 - \ln(x - 3)^2) = +\infty$, $x = 3$ é assíntota vertical ao gráfico de f .

Temos que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - \ln(x - 3)^2}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{R.C.} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-\frac{2(x-3)}{(x-3)^2}}{1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{2}{x-3} = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - 0x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 - \ln(x - 3)^2) = -\infty.$$

Logo, não existem assíntotas não verticais ao gráfico de f .

- (b) A recta ortogonal ao gráfico de f é paralela à recta $y = -x$ quando o seu declive for igual a -1 , ou seja, quando $-\frac{1}{f'(x)} = -1$. Como $f'(x) = -\frac{2}{x-3}$ (calculada na alínea anterior), vem que

$$-\frac{1}{f'(x)} = -1 \Leftrightarrow x = 1.$$

- (c) Sabemos que f é diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, e portanto $f'(x) = 0$ sempre que x é um extremo relativo. Mas $f'(x) = 0$ não tem solução, e logo f não tem extremos relativos.
- (d) Temos que $f''(x) = \frac{2}{(x-3)^2} > 0$ para todo o $x \in D$, e portanto f tem a concavidade virada para cima em D , e não tem pontos de inflexão.