Análise Matemática I

ISEL

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução do Teste 2 - 06/01/2006

---

1. Comecemos por simplificar a função f.

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{\arctan x} + x\ln(1+x^2) + 1}{1+x^2} = \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2} + \frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2}.$$

Como $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

$$P\,\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2} = P\,\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{e}^{\arctan x} = \mathrm{e}^{\arctan x},$$

$$P\,\frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2} = P\,\frac{x}{1+x^2}\ln(1+x^2) = \frac{1}{4}\ln^2(1+x^2).$$

Então

$$P\,\frac{\mathrm{e}^{\arctan x} + x\ln(1+x^2) + 1}{1+x^2} = P\,\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2} + P\,\frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2} + P\,\frac{1}{1+x^2} =$$
$$= \mathrm{e}^{\arctan x} + \frac{1}{2}\ln^2(1+x^2) + \arctan x + c,$$

com $c \in \mathbb{R}$.

2. A função $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$ é uma fracção racional.

O denominador,

$$x^3 + 1 = (x+1)\left(x^2 - x + 1\right),$$

tem a raiz real $x = -1$, com multiplicidade 1, e duas raizes complexas.

Assim

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}\,.$$

Logo $1 = A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1) = (A+B)x^2+(B+C-A)x+A+C$, donde se obtém o sistema de equações

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C-A=0 \\ A+C=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\dfrac{1}{3} \\ B=-\dfrac{1}{3} \\ C=\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned}
P\,\frac{1}{x^3+1} &= P\left(\frac{\frac{1}{3}}{x+1}+\frac{-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}}{x^2-x+1}\right)=\\
&=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\,P\frac{x-2}{x^2-x+1}=\\
&=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\,P\frac{2x-4}{x^2-x+1}=\\
&=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\,P\frac{2x-4}{x^2-x+1}=\\
&=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\,P\frac{2x-1}{x^2-x+1}-\frac{1}{6}\,P\frac{-3}{x^2-x+1}=\\
&=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\,\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{2}\,P\frac{1}{x^2-x+1}\,.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
P\frac{1}{x^2-x+1} &= P\frac{1}{x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=P\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\\
&=\frac{1}{\frac{3}{4}}\,P\frac{1}{1+\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}}=\frac{4}{3}\,P\frac{1}{1+\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}\,P\frac{1}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\\
&=\frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,P\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),
\end{aligned}$$

obtemos

$$P\,\frac{1}{x^3+1}=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\,\ln\left|x^2-x+1\right|+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\,x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+c,$$

onde $c\in\mathbb{R}$.

3. Primitivando por partes, com $u=x$ e $v'=\mathrm{e}^x$, verifica-se que todas as primitivas de $f(x)=x\mathrm{e}^x$ são da forma

$$P\,x\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x-P\,\mathrm{e}^x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+c,$$

com $c\in\mathbb{R}$.

A primitiva da função f, cujo gráfico passa no ponto $(0,1)$, verifica a igualdade

$$-1+c=1\iff c=2.$$

Ou seja, é a função $p(x)=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+2$.

4. Utilizando a regra da primitiva de uma potência, temos

$$\begin{aligned}
\int_1^{\mathrm{e}}\frac{\sqrt{4-\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{x}\,(4-\ln x)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x=-\frac{2}{3}\left[(4-\ln x)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{\mathrm{e}}=\\
&=-\frac{2}{3}\left((4-\ln(\mathrm{e}))^{\frac{3}{2}}-(4+\ln(1))^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}}-3^{\frac{3}{2}}\right).
\end{aligned}$$

5. Façamos a mudança de variável $t = \sin(x)$.

   Então $x = \arcsin(t)$ e $x' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Além disso,

$$x = 0 \iff t = 0,$$
$$x = \frac{\pi}{2} \iff t = 1.$$

   Então

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{t}{\arcsin t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}\,\mathrm{d}x.$$

6. Seja f uma função ímpar, isto é, tal que $f(-x) = -f(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   Para qualquer número real a,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Fazendo a mudança de variável $t = -x$, na primeira parcela do membro direito, obtém-se

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^0 f(-t) \times (-1)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(-t)\,\mathrm{d}t.$$

   Como a função f é ímpar,

$$\int_0^a f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a -f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Logo

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

7. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = xf(x)$.

   Derivando ambos os membros da igualdade, obtém-se

$$f(x) = f(x) + xf'(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow xf'(x) = 0,$$

   para todo $x \in \mathbb{R}$.

   Então $f'(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo $f(x) = k$, onde k é uma constante.

8. Seja R a região limitada por $y = \mathrm{e}^x$, $y = \ln x$, $x = 1$ e $x = \mathrm{e}$ (ver a figura 1). A área de R é dada por

$$A = \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{e}^x - \ln(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Utilizando a técnica de primitivação por partes, com $u = \ln(x)$ e $v' = 1$, tem-se

$$P\ln(x) = x\ln(x) - P\,1 = x\ln(x) - x.$$

   Então

$$A = \int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{e}^x - \ln(x)\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x + x - x\ln(x)]_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}} - \mathrm{e} - 1.$$

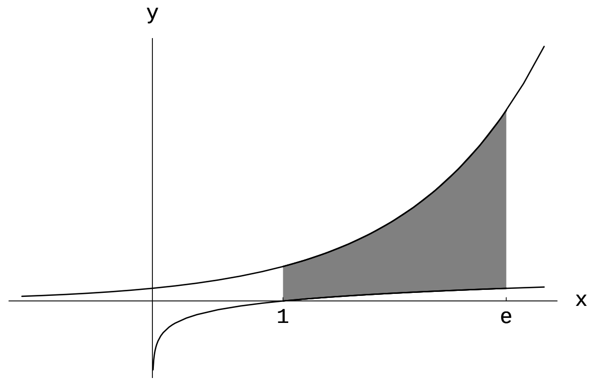

Figura 1: Superfície R.

9. Seja S a porção do plano definida por $y \leq \mathrm{e}^x$, $x \leq 0$ e $y \geq 0$ (ver a figura 2).

   O sólido de revolução que se obtém rodando a superfície S em torno do eixo dos xx não é limitado. O seu volume é dado por:

$$V = \pi \int_{-\infty}^{0} (\mathrm{e}^x)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x = \pi \lim_{c \to -\infty} \int_{c}^{0} \mathrm{e}^{2x} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \pi \lim_{c \to -\infty} \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} \right]_c^0 = \pi \lim_{c \to -\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2c}}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \, .$$

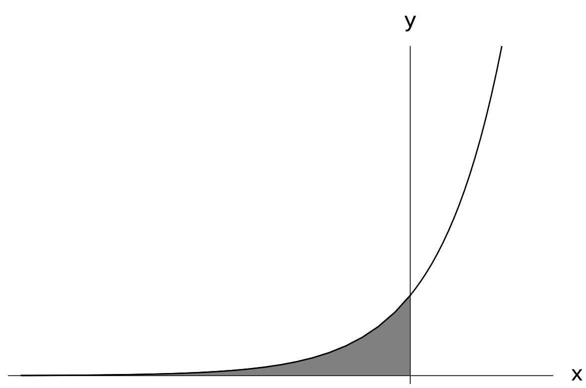

Figura 2: Superfície S.

10.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\arctan x} \, \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{(1+x^2)\arctan x} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x} \, \mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \Big[\ln |\arctan x\,| \Big]_1^c =$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \ln |\arctan c\,| - \ln\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) - \ln\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln(2).$$