

1. (a) A função f é contínua em $x = 0$, se $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$. Vamos estudar os limites laterais:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 - 3x^2 + 2x = 0.$$

Logo existe o limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, e é igual a $f(0)$. Então f é contínua em 0.

f é diferenciável em $x = 0$, se existir e for finito o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x}}{-(\sqrt{-x})^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{\sqrt{-x}} = -\infty.$$

Logo a função f não é diferenciável em $x = 0$.

- (b) No intervalo $] -\infty, 0[$, $f(x) = \sqrt{-x}$ é uma função diferenciável. Por isso, todos os extremos de f neste intervalo são pontos críticos, isto é, pontos onde a derivada é nula.

Como $f'(x) = (\sqrt{-x})' = -\frac{1}{2\sqrt{-x}} < 0$, a função f não tem pontos críticos no intervalo $] -\infty, 0[$. Logo também não tem extremos.

No intervalo $]0, +\infty[$, $f = x^3 - 3x^2 + 2x$ é diferenciável. Os pontos críticos de f satisfazem a equação $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 = 0$. Ou seja, $x = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

e $x = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ são os pontos críticos de f neste intervalo.

(Note-se que: $1 < \sqrt{3} \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow -1 < -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 0 < 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$.)

Para determinar se estes pontos são extremos da função, vai-se estudar o crescimento de f .

	0		$1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$		$1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$	$+\infty$
f'	-	+	0	-	0	+
f	0	↗	MAX	↘	MIN	↗

Logo a função f tem um máximo relativo em $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ e um mínimo relativo

em $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Em $x = 0$, a função f não é diferenciável. Por isso, mesmo que f tenha um extremo nesse ponto, 0 não será um ponto crítico. Vamos estudar o comportamento da função numa vizinhança de 0:

se $x < 0$, $f(x) = \sqrt{-x} > 0$;

se $x > 0$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) > 0$.

Assim $f(0) = 0$ é um mínimo relativo da função f .

2. Suponhamos que a equação

$$\cos(2x) + 5x = 1 \quad (*)$$

tem duas soluções distintas, x_1 e x_2 , com $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$.

$$\cos(2x) + 5x = 1 \iff \cos(2x) + 5x - 1 = 0$$

Seja $F(x) = \cos(2x) + 5x - 1$. As soluções x_1 e x_2 da equação (*) são zeros da função F , isto é, $F(x_1) = F(x_2) = 0$.

A função F é diferenciável em \mathbb{R} . Logo é contínua em qualquer intervalo fechado $[x_1, x_2]$, e é diferenciável em qualquer intervalo aberto $]x_1, x_2[$.

Aplicando o Teorema de Rolle à função F , conclui-se que existe pelo um número c , com $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < c < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$, tal que $F'(c) = 0$.

A derivada $F'(x) = -2\text{sen}(2x) + 5$, logo

$$F'(x) = 0 \iff -2\text{sen}(2x) + 5 = 0 \iff \text{sen}(2x) = \frac{5}{2} > 1,$$

o que é impossível.

Conclui-se que a equação (*) não pode ter duas soluções distintas. Terá, no máximo, uma solução.

3. Multiplicando pelo conjugado, obtém-se

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. O polinómio de Taylor do 2º grau da função g no ponto $a = 0$ é dado por

$$p_2(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2}x^2.$$

$$g(x) = \ln(1 + x^2) \quad g'(x) = \frac{2x}{1 + x^2} \quad g''(x) = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}$$

$$g(0) = 0 \quad g'(0) = 0 \quad g''(0) = 2$$

Assim $p_2(x) = x^2$.

Como $\ln(1, 01) = g(0, 1)$, considera-se $\ln(1, 01) \approx p_2(0, 1) = 0, 1^2 = 0, 01$.

5. A função $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$ é uma fracção racional.

O denominador,

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1),$$

tem a raiz real $x = -1$, com multiplicidade 1, e duas raízes complexas.

Assim

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}.$$

Logo $1 = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1) = (A + B)x^2 + (B + C - A)x + A + C$,
 donde se obtém o sistema de equações

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ B + C - A = 0 \\ A + C = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{1}{3} \\ B = -\frac{1}{3} \\ C = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Assim

$$\begin{aligned} P \frac{1}{x^3 + 1} &= P \left(\frac{\frac{1}{3}}{x + 1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{3} P \frac{x - 2}{x^2 - x + 1} = \\ &= \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} P \frac{2x - 4}{x^2 - x + 1} = \\ &= \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} P \frac{2x - 4}{x^2 - x + 1} = \\ &= \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} P \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{6} P \frac{-3}{x^2 - x + 1} = \\ &= \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{2} P \frac{1}{x^2 - x + 1}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} P \frac{1}{x^2 - x + 1} &= P \frac{1}{x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = P \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{1}{\frac{3}{4}} P \frac{1}{1 + \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{3}{4}}} = \frac{4}{3} P \frac{1}{1 + \frac{4}{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3} P \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} P \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \end{aligned}$$

obtemos

$$P \frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \ln|x + 1| - \frac{1}{6} \ln|x^2 - x + 1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + c,$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

6. Primitivando por partes, com $u = x$ e $v' = e^x$, verifica-se que todas as primitivas de $f(x) = xe^x$ são da forma

$$P xe^x = xe^x - P e^x = xe^x - e^x + c,$$

com $c \in \mathbb{R}$.

A primitiva da função f , cujo gráfico passa no ponto $(0, 1)$, verifica a igualdade

$$-1 + c = 1 \iff c = 2.$$

Ou seja, é a função $p(x) = xe^x - e^x + 2$.

7. Façamos a mudança de variável $t = \sin(x)$.

Então $x = \arcsin(t)$ e $x' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Além disso,

$$\begin{aligned} x = 0 &\iff t = 0, \\ x = \frac{\pi}{2} &\iff t = 1. \end{aligned}$$

Então

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^1 \frac{t}{\arcsin t} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x} dx.$$

8. Seja f uma função diferenciável em \mathbb{R} tal que $\int_0^x f(t) dt = xf(x)$.

Derivando ambos os membros da igualdade, obtém-se

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) + xf'(x) \iff \\ &\iff xf'(x) = 0, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Então $f'(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo $f(x) = k$, onde k é uma constante.

9. Seja S a porção do plano definida por $y \leq e^x$, $x \leq 0$ e $y \geq 0$ (ver a figura 1).

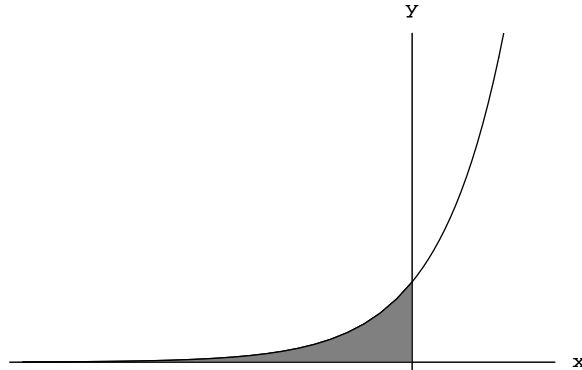


Figura 1: Superfície S .

O sólido de revolução que se obtém rodando a superfície S em torno do eixo dos xx não é limitado. Assim o seu volume é dado por:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\infty}^0 (e^x)^2 dx = \pi \int_{-\infty}^0 e^{2x} dx = \pi \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 e^{2x} dx = \\ &= \pi \lim_{c \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_c^0 = \pi \lim_{c \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{e^{2c}}{2} \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$