ISEL

Análise Matemática I

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução do Teste Global - 09/01/2006

---

1. Considere a função

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & \text{se } 0\le x\le 1\\[2mm] \dfrac{1}{x} & \text{se } 1<x\le 2\end{cases}$$

(a) Mostre que a função f é contínua e diferenciável em $x=1$.

Resolução. Como $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-x^2}{2}=,1\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x}=1$ e $f(1)=1$, temos que f é contínua em $x=1$.

Como $f'_e(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{3-x^2}{2}-1}{x-1}=-1$ e $f'_d(1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=-1$, temos que f é diferenciável em $x=1$.

(b) Determine os pontos em que a recta tangente ao gráfico de f é paralela à recta $y=-\dfrac{1}{2}x+4$.

Resolução. A recta tangente ao gráfico de f é paralela à recta $y=-\dfrac{1}{2}x+4$ se $f'(x)=-\dfrac{1}{2}$.

Como

$$f'(x)=\begin{cases}-x & \text{se } 0<x\le 1\\[2mm] -\dfrac{1}{x^2} & \text{se } 1<x<2\end{cases},$$

vem que

$$\begin{aligned} f'(x)=-\frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(-x=-\frac{1}{2}\wedge 0<x\le 1\right)\vee\left(-\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{2}\wedge 1<x<2\right)\\ &\Leftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}\vee x=\sqrt{2}. \end{aligned}$$

2. Mostre que a equação $x^3+3x-1=0$ admite uma única solução em $\mathbb{R}$, situada no intervalo $]0,1[$. (Sugestão: Aplique o Corolário do Teorema de Bolzano.)

Resolução. Seja $f(x)=x^3+3x-1$.

A função f é contínua em $\mathbb{R}$, e portanto é contínua em $[0,1]$. Como $f(0)=-1$ e $f(1)=3$, pelo Corolário do Teorema de Bolzano, existe $c\in]0,1[$ tal que $f(c)=0$.

Como $f'(x)=3x^2+3>0$ para todo o x, temos que f é crescente, e logo a solução é única.

3. Calcule, caso exista, o limite $\lim\limits_{xto0}\dfrac{\tan x-x}{x-\sin x}$.

Resolução.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x} &\underset{R.C.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x-\cos^3 x} \underset{R.C.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\\ &\underset{R.C.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{-2\sin x\cos x+\sin x\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x}{-2\cos x+\cos^2 x}=2. \end{aligned}$$

4. Determine os pontos de inflexão de $f(x) = \dfrac{x^5}{20} - \dfrac{x^4}{12}$.

Resolução. Temos que $f'(x) = \dfrac{5x^4}{20} - \dfrac{4x^3}{12}$ e $f''(x) = \dfrac{20x^3}{20} - \dfrac{12x^2}{12} = x^3 - x^2$. Então

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \vee x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1.$$

Estudemos o sinal de f'':

	$-\infty$	0		1	$+\infty$
x^2	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$1-x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cap$	$P.I.$	$\cup$

Logo f tem um ponto de inflexão, em $x = 1$.

5. Calcule uma primitiva de $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x^2+1)}$.

Resolução. A função $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)(x^2+1)}$ é uma função racional. Como $(x-1)(x^2+1)$ tem uma raíz real simples e um par de raízes complexas de multiplicidade 1, vem que

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Logo $x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$, donde obtemos o sistema

$$\begin{cases} 0 = A + B \\ 1 = -B + C \\ 0 = A - C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} P\frac{x}{(x-1)(x^2+1)} &= P\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}P\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}P\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}P\frac{1}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{2}P\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2}P\frac{1}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x. \end{aligned}$$

6. Calcule a primitiva de $f(x) = x \sin x$ cujo gráfico passa pelo ponto $(0, 1)$.

Resolução. Utilizando a primitivação por partes com $u' = \sin x$ e $v = x$, temos que as primitivas de $f(x)$ são da forma

$$Px \sin x = -x \cos x + P \cos x = -x \cos x + \sin x + k.$$

O gráfico da primitiva passará no ponto $(0, 1)$ se $-0 \cos 0 + \sin 0 + k = 1$, ou seja, se $k = 1$.

7. Seja f uma função par (isto é, tal que $f(-x) = f(x)$ para todo o $x \in \mathbb{R}$). Mostre que $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$, para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

Resolução. Seja f uma função par. Então, para qualquer $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Fazendo a substituição $\varphi(t) = -t$, obtemos que $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-t)(-1)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{a} f(-t)\,\mathrm{d}t$. Logo, e como f é par,

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{a} f(-x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

como pretendido.

8. Mostre que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x - 1} = 0$.

   Resolução.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x - 1} \underset{R.C.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + x\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x} = \frac{0+0}{1} = 0.$$

9. Calcule a área da figura definida por $y \leq \mathrm{e}^{-x}$, $x \geq 1$ e $y \geq 0$.

   Resolução.

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to+\infty} \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_1^c \\ &= \lim_{c\to+\infty} (-\mathrm{e}^{-c} + \mathrm{e}^{-1}) = -\mathrm{e}^{-\infty} + \mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1}.\end{aligned}$$