



ISEL

Análise Matemática I

Departamento de Engenharia Mecânica

Teste 1 - 17/11/2005

Leia atentamente o enunciado antes de iniciar a resolução do teste e apresente todos os cálculos que efectuar.

Duração: 1h30m

1. Seja f a função dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - ax + b & \text{se } x \leq 0 \\ \ln(x + e) & \text{se } 0 < x < e \\ e + x & \text{se } x > e \end{cases}$$

onde a e b são constantes.

(2.0) (a) Indique o domínio de f . Esta função é prolongável por continuidade ao ponto $x = e$? Justifique.

(2.0) (b) Determine a e b de modo a que f seja diferenciável em $x = 0$.

(2.0) 2. Seja p uma função real de variável real contínua em $[0, 1]$, tal que $0 < p(x) < 1$. Mostre que existe um ponto $c \in]0, 1[$ para o qual $p(c) = c$. (Sugestão: aplique o Corolário do Teorema de Bolzano a $q(x) = p(x) - x$.)

(2.0) 3. Mostre que $\sin b - \sin a = (b - a) \cos c$, para algum $c \in]a, b[$. (Sugestão: aplique o Teorema de Lagrange.)

(2.0) 4. Seja $g(x) = f(\arctan(x))$ com f diferenciável em \mathbb{R} . Sabendo que $f'(\frac{\pi}{4}) = 2$, calcule $g'(1)$.

(2.0) 5. Calcule, caso exista, o limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

6. Considere a função $f(x) = 1 - \ln(x - 3)^2$. Determine:

(2.0) (a) As assíntotas ao gráfico de f .

(2.0) (b) O ponto em que a recta ortogonal ao gráfico de f é paralela à recta $y = -x$.

(2.0) (c) Os extremos relativos de f .

(2.0) (d) O sentido das concavidades de f e os seus pontos de inflexão.