

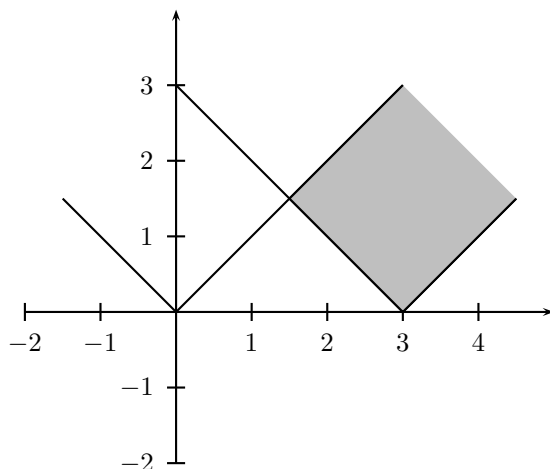
1. Determine em \mathbb{R} o interior, a fronteira, e o conjunto dos pontos de acumulação do conjunto $\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq |x - 3|\}$.

Resolução. Sendo $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq |x - 3|\}$, como

$$\begin{aligned} |x| \geq |x - 3| &\Leftrightarrow x \geq |x - 3| \vee x \leq -|x - 3| \Leftrightarrow |x - 3| \leq x \vee |x - 3| \leq -x \\ &\Leftrightarrow (x - 3 \leq x \wedge x - 3 \geq -x) \vee (x - 3 \leq -x \wedge x - 3 \geq x) \\ &\Leftrightarrow (-3 \leq 0 \wedge 2x \geq 3) \vee (2x \leq 3 \wedge -3 \geq 0) \\ &\Leftrightarrow 2x \geq 3, \end{aligned}$$

obtemos $A = \left[\frac{3}{2}, +\infty \right[$.

Poderíamos ainda recorrer aos gráficos das funções $|x|$ e $|x - 3|$:



Então $\text{int}(A) = \left] \frac{3}{2}, +\infty \right[$, $\text{fr}(A) = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$ e $A' = \left[\frac{3}{2}, +\infty \right[$.

2. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos relativos de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } |x| > 1 \end{cases} .$$

Resolução. O domínio de f é $D = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1 \vee (x \neq 0 \wedge |x| > 1)\} = \mathbb{R}$.

Para estudar os intervalos de monotonia e extremos relativos, comecemos por observar que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < -1 \\ x^2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases} .$$

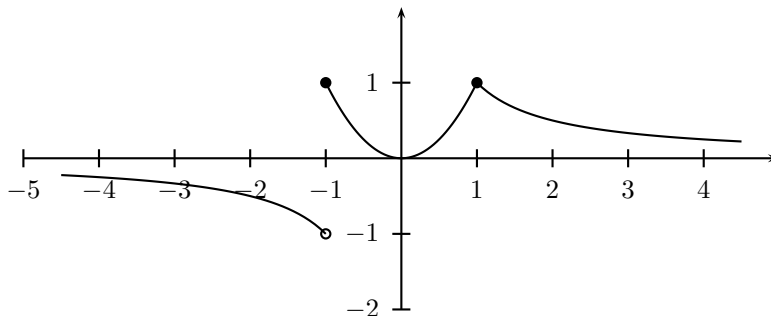
Temos então que

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & \text{se } x < -1 \\ 2x & \text{se } -1 < x < 1 \\ -\frac{1}{x^2} & \text{se } x > 1 \end{cases} .$$

Fazendo o quadro dos sinais, vem

	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	s/s	$-$	0	$+$	s/s	$-$
$f(x)$	\searrow		\searrow	m	\nearrow		\searrow

Vejamos o gráfico da função:



Assim, a função é crescente em $[0, 1]$, decrescente em $]-\infty, 0]$ e em $[1, +\infty[$ e tem máximos relativos em $x = -1$ e $x = 1$ e mínimo relativo em $x = 0$.

3. Calcule o limite $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln(x-1)$.

Resolução. Como $\lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln(x-1) = 0 \times \infty$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \ln x \ln(x-1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} \stackrel{\frac{0}{\infty}}{R.C.} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x \ln^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{x \ln^2 x}{x-1} = \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{R.C.} \lim_{x \rightarrow 1} -\frac{\ln^2 x + 2x \frac{1}{x} \ln x}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} -(\ln^2 x + 2 \ln x) = 0. \end{aligned}$$

4. Primitiva, utilizando o método da substituição e apresentando todos os cálculos, a função $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}$.

Resolução. Consideremos a substituição $\varphi(t) = t^2$. Então $\varphi'(t) = 2t$, e logo

$$P \frac{x}{1 + \sqrt{x}} = P \frac{t^2}{1 + t} \cdot 2t = 2P \frac{t^3}{1 + t}.$$

Dividindo os polinômios,

$$\begin{array}{r} t^3 \\ -t^3 \quad -t^2 \\ \hline -t^2 \\ \quad t^2 \quad +t \\ \quad \quad t \\ \quad \quad \quad -t \quad -1 \\ \quad \quad \quad \quad -1 \end{array} \quad \cdot \quad \frac{t+1}{t^2-t+1}.$$

vem que $\frac{t^3}{1+t} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}$, e portanto

$$2P \frac{t^3}{1+t} = 2P \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t} \right) = 2 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln |1+t| \right) = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - x + 2\sqrt{x} - 2 \ln |1+\sqrt{x}|.$$

5. Estude quanto à convergência o integral $\int_0^{e^\pi} \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$.

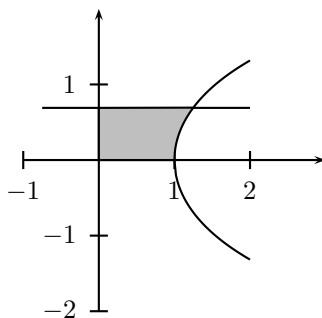
Resolução. Temos que

$$\begin{aligned} \int_0^{e^\pi} \frac{\cos(\ln x)}{x} dx &= \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^{e^\pi} \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \lim_{c \rightarrow 0} [\sin(\ln x)]_c^{e^\pi} = \\ &= \lim_{c \rightarrow 0} (\sin(\ln e^\pi) - \sin(\ln c)) = \sin \pi - \sin \ln 0 = 0 - \sin(-\infty). \end{aligned}$$

Como este limite não existe, o integral é divergente.

6. Calcule a área de $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \ln 2 \wedge 0 \leq x \leq \cosh y\}$.

Resolução. O conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \ln 2 \wedge 0 \leq x \leq \cosh y\}$ é a figura representada no gráfico seguinte:



$$A = \int_0^{\ln 2} \cosh y dy = [\sinh y]_0^{\ln 2} = \sinh \ln 2 - \sinh 0 = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}.$$

7. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$.

Resolução. A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ é uma série decomponível:

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1}.$$

Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}}{2n-1} - \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{2 \cdot 1 - 1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}}{2n+1} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

8. Estude quanto à convergência a seguinte série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}.$$

Resolução. Aplicando o critério de D'Alembert (da razão), sendo $a_n = \frac{n+1}{2^n}$, então $a_{n+1} = \frac{n+2}{2^{n+1}}$, e

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{n+2}{2^{n+1}}}{\frac{n+1}{2^n}} = \lim \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Logo, a série é convergente.

9. Determine o raio de convergência e a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$.

Resolução. Sendo $a_n = (-1)^n$, então

$$\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \left| \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} \right| = 1.$$

Assim, a série é convergente para $|x^2| < 1$, ou seja, para $|x| < 1 = R$. Para calcular a soma, observemos que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$ é uma série geométrica. Assim, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$.

10. Determine o coeficiente a_{98} da expansão em série de potências da função $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ para $x = 0$.

Resolução. Seja $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

O coeficiente a_{98} da expansão em série de potências de f para $x = 0$ é $\frac{f^{(98)}(0)}{98!}$.

Temos que $f'(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, $f''(x) = -2^2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, $f'''(x) = -2^3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ e $f^{(4)}(x) = 2^4 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. Como $98 = 24 \times 4 + 2$, vem que $f^{(98)}(x) = -2^{98} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, e portanto $f^{(98)}(0) = -2^{98} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2^{98} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Assim, $a_{98} = -2^{97} \frac{\sqrt{2}}{98!}$.