

1. Determine em \mathbb{R} o interior, a fronteira, e o conjunto dos pontos de acumulação do conjunto $\mathbb{R} \setminus]-2, +\infty[\cup \{1\}$.

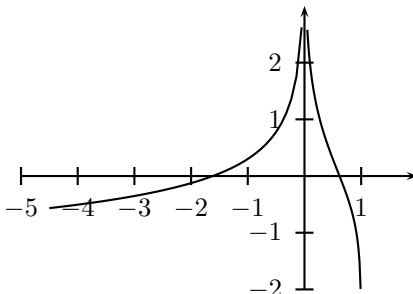
Resolução. Temos que $A = \mathbb{R} \setminus]-2, +\infty[\cup \{1\} =]-\infty, -2] \cup \{1\}$. Então $\text{int}(A) =]-\infty, -2[$, $\text{fr}(A) = \{-2, 1\}$ e $A' =]-\infty, -2]$.

2. Determine o domínio e as assíntotas de $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{x^2}\right)$.

Resolução. O domínio de f é $D = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1-x}{x^2} > 0 \wedge x^2 \neq 0\right\} =]-\infty, 1[\setminus \{0\}$.

Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{1-x}{x^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{0^+}\right) = \ln(+\infty) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln\left(\frac{1-x}{x^2}\right) = \ln(0) = -\infty$, f tem assíntotas verticais $x = 0$ e $x = 1$.

De $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(\frac{1-x}{x^2}\right)}{x} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{R.C.}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{x^2-x}}} = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{1-x}{x^2}\right) = -\infty$, a função não tem assíntotas não horizontais.



3. Calcule o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctan t^2 dt}{x^3}$.

Resolução.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \arctan t^2 dt}{x^3} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{R.C.}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x^2}{3x^2}}} \stackrel{\frac{0}{0}}{\underset{R.C.}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1+x^4}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{6x(1+x^4)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

4. Sabendo que $P \sin^2 x = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sin x \cos x$ e $P \cos^2 x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \cos x$, utilize o método da primitivação por partes, apresentando todos os cálculos, para obter uma primitiva de $f(x) = x \sin x \cos x$.

Resolução. Por partes, fazendo $u' = \cos x$ e $v = x \sin x$, então $u = \sin x$ e $v' = \sin x + x \cos x$, e

$$Px \sin x \cos x = x \sin^2 x - P \sin x(\sin x + x \cos x) = x \sin^2 x - P \sin^2 x - Px \sin x \cos x.$$

Então

$$2Px \sin x \cos x = x \sin^2 x - P \sin^2 x \Rightarrow Px \sin x \cos x = \frac{1}{2}x \sin^2 x - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \sin x \cos x.$$

Em alternativa, fazendo $u' = \sin x \cos x$ e $v = x$, então $u = \frac{1}{2} \sin^2 x$ e $v' = 1$, e

$$Px \sin x \cos x = \frac{1}{2}x \sin^2 x - \frac{1}{2}P \sin^2 x = \frac{1}{2}x \sin^2 x - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \sin x \cos x.$$

Ou ainda, observando que $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin(2x)$, fazendo $u' = \frac{1}{2} \sin(2x)$ e $v = x$, então $u = -\frac{1}{4} \cos(2x)$ e $v' = 1$, e

$$Px \sin x \cos x = -\frac{1}{4}x \cos(2x) + \frac{1}{4}P \cos(2x) = -\frac{1}{4}x \cos(2x) + \frac{1}{8} \sin(2x).$$

5. Estude quanto à convergência o integral $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$.

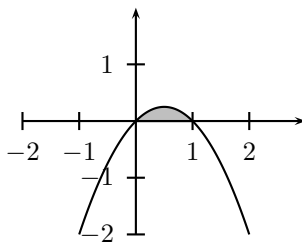
Resolução. Temos que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \lim_{c \rightarrow 0} \int_c^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \lim_{c \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_c^{\frac{1}{2}} = \lim_{c \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{\ln \frac{1}{2}} + \frac{1}{\ln c} \right) = \frac{1}{\ln 2} + 0,$$

e logo o integral é convergente.

6. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo dos yy da figura limitada por $y = x - x^2$ e por $y = 0$.

Resolução. A figura limitada por $y = x - x^2$ e por $y = 0$ é a figura representada no gráfico seguinte:



$$V = 2\pi \int_0^1 x(x - x^2) dx = 2\pi \int_0^1 (x^2 - x^3) dx = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = 2\pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}.$$

7. Estude quanto à convergência as seguintes séries:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$.

Resolução. Como $(-1)^{n-1} \not\rightarrow 0$, a série é divergente.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$.

Resolução. Aplicando o critério da comparação, temos que

$$\lim \frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}}{\frac{1}{n^3}} = \lim \frac{2n^4 + n^3}{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4} = 2 \in]0, +\infty[.$$

Logo, a série tem a mesma natureza que a série de termo geral $\frac{1}{n^3}$, ou seja, é convergente.

8. Determine o intervalo de convergência das seguintes séries de potências e investigue, se possível, a convergência nos extremos deste intervalo:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n.$

Resolução. Sendo $a_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}$, então

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

Assim, a série é convergente para $|x| < 4$, ou seja, para $x \in]-4, 4[$.

Para $x = 4$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} \cdot 4^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} \cdot 2^{2n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n-1},$

e $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{2n-1} = e^{-1} \cdot 1 \neq 0$, e logo a série é divergente.

Para $x = -4$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} \cdot (-4)^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} \cdot 2^{2n-1} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n-1},$

e $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n-1}$ não existe, e logo a série é divergente.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n.$

Resolução. Sendo $a_n = \frac{n}{n+1}$, então

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} \right| = 1.$$

Assim, a série é convergente para $\left|\frac{x}{2}\right| < 1$, ou seja, para $x \in]-2, 2[$.

Para $x = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, e logo a série é divergente.

Para $x = -2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}$ não existe, e logo a série é divergente.