ISEL

Análise Matemática I

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução do Teste 1 - 04/11/2006

---

1. Determine o interior, fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de cada um dos conjuntos seguintes e indique quais são abertos e quais são fechados:

   (a) $[0,2[\cup]3,5]\cup\{6,7\}$;

   Resolução. Denotando por A o conjunto, $\text{int}(A)=]0,2[\cup]3,5[$, $\text{fr}(A)=\{0,2,3,5,6,7\}$, $A'=[0,2]\cup[3,5]$, e A não é aberto nem fechado.

   (b) $\{x : x^3 \geq x\}$.

   Resolução. Sendo $B=\{x : x^3\geq x\}$, como

$$x^3\geq x \Leftrightarrow x^3-x\geq 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1)\geq 0,$$

   fazendo o quadro dos sinais,

	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

   obtemos $B=[-1,0]\cup[1,+\infty[$.
   Então $\text{int}(B)=]-1,0[\cup]1,+\infty[$, $\text{fr}(B)=\{-1,0,1\}$, $B'=[-1,0]\cup[1,+\infty[$, e B é fechado.

2. Considere a função $f(x)=\ln|1+x|$.

   (a) Determine o domínio e as assímptotas de f.

   Resolução. $D=\{x\in\mathbb{R} : |1+x|>0\}=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
   Como $\lim\limits_{x\to-1^-}\ln|1+x|=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to-1^+}\ln|1+x|=-\infty$, a recta $x=-1$ é assímptota vertical do gráfico de f.
   Como

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\ln|1+x|}{x}\underset{R.C.}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=0$$

   mas

$$\lim_{x\to\pm\infty}\ln|1+x|=+\infty,$$

   o gráfico de f não tem assímptotas não verticais.

   (b) Determine os intervalos de monotonia e extremos relativos de f.

   Resolução. Como $f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$, vem que $f'(x)<0\Leftrightarrow x<-1$. Logo f é decrescente em $]-\infty,-1[$, crescente em $]-1,+\infty[$ e não tem extremos relativos.

(c) Calcule o contradomínio de f.

Resolução. $CD = \mathbb{R}$.

3. Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\sin^2 x}{x^4}\right)$;

Resolução.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\sin^2 x}{x^4}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4} \underset{R.C.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x\cos x}{4x^3} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3} \underset{R.C.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2} \underset{R.C.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{12x} \underset{R.C.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{4\cos 2x}{12} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

(b) $\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{x+\cos x}$.

Resolução. Como $\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{x+\cos x} = \lim_{x\to 0}(x+\cos x)^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}$ e

$$\ln\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{x+\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(x+\cos x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+\cos x)}{x} \underset{R.C.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\sin x}{x+\cos x}}{1} = 1,$$

vem que $\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{x+\cos x} = \mathrm{e}$.

4. Calcule uma primitiva das seguintes funções:

(a) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$;

Resolução. $P\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = P\dfrac{\frac{1}{x}}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin\ln x.$

(b) $\dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}}$.

Resolução. $P\dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{1+\tan x}} = P\dfrac{1}{\cos^2 x}(1+\tan x)^{1/2} = 2\sqrt{1+\tan x}.$

5. Utilize o método da primitivação por partes, apresentando todos os cálculos, para obter uma primitiva de $f(x) = \ln^2 x$.

Resolução. Por partes, fazendo $u' = 1$ e $v = \ln^2 x$. Então $u = x$ e $v' = \dfrac{2}{x}\ln x$, e

$$P\ln^2 x = x\ln^2 x - 2P\ln x.$$

Novamente por partes, fazendo $u' = 1$ e $v = \ln x$, vem que $P\ln x = x\ln x - x$. Logo

$$P\ln^2 x = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x.$$

6. Utilize o método da primitivação por substituição, apresentando todos os cálculos, para obter uma primitiva de $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$.

Resolução. Consideremos a substituição $\varphi(t) = t^6$. Então $\varphi'(t) = 6t^5$, e

$$P\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} = P\frac{t^3}{1+t^2}\cdot 6t^5 = 6P\frac{t^8}{1+t^2}.$$

Dividindo os polinómios,

$$\begin{array}{llll|l}
t^8 & & & & t^2+1 \\ \cline{5-5}
-t^8 & -t^6 & & & t^6-t^4+t^2-1 \\ \cline{1-2}
 & -t^6 & & & \\
 & t^6 & +t^4 & & \\ \cline{2-3}
 & & t^4 & & \\
 & & -t^4 & -t^2 & \\ \cline{3-4}
 & & & -t^2 & \\
 & & & t^2 \quad +1 & \\ \cline{4-4}
 & & & \quad\;\; 1 &
\end{array}$$

vem que $\dfrac{t^8}{1+t^2} = t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \dfrac{1}{1+t^2}$, e portanto

$$\begin{aligned}
P\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} &= 6P\left(t^6 - t^4 + t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right) = 6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t + \arctan t\right) \\
&= \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + 2\sqrt[6]{x^3} - 6\sqrt[6]{x} + 6\arctan\sqrt[6]{x}.
\end{aligned}$$

7. Apresentando todos os cálculos, obtenha uma primitiva da função racional

$$f(x) = \frac{x^3+2}{(x^2+x+1)(x-1)^2}.$$

Resolução. Como $(x^2+x+1)(x-1)^2$ tem um par de raízes complexas simples e uma raíz real de multiplicidade 2, vem que

$$\frac{x^3+2}{(x^2+x+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2}.$$

Logo $x^3+2 = (Ax+B)(x^2-2x+1) + C(x^3-1) + D(x^2+x+1)$, donde obtemos $A=1$, $B=1$, $C=0$ e $D=1$. Assim,

$$\begin{aligned}
P\frac{x^3+2}{(x^2+x+1)(x-1)^2} &= P\left(\frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}P\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2+x+1}\right) - \frac{1}{x-1} \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}P\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} - \frac{1}{x-1} \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{x-1}.
\end{aligned}$$