ISEL

Análise Matemática I

Departamento de Engenharia Mecânica

Teste 2 - Modelo

Leia atentamente o enunciado antes de iniciar a resolução do teste e apresente todos os cálculos que efectuar.

Duração: 1h30m

---

1. Considere as funções $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x + 2}$ e $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$.

(1.5) (a) Estude quanto à convergência o integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(1.0) (b) Calcule a área limitada pelo gráfico de g e pelo eixo dos xx.

(1.5) (c) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo dos yy da figura $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$.

2. Estude quanto à convergência simples e absoluta as seguintes séries:

(2.0) (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$;

(2.0) (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}$;

(2.0) (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n}$;

(2.0) (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

3. Considere a seguinte série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

(2.0) (a) Calcule $f^{(999)}(0)$.

(2.0) (b) Determine o domínio de convergência da série dada.

(2.0) (c) Mostre que $f(x) = \arctan(x)$.

(2.0) 4. Determine o polinómio de grau dois $P(x)$ tal que $2^x = P(x) + o(x^2)$, quando $x \to 0$, e utilize-o para calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x}$.

Soluções

1. (a) Convergente: $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

   (b) $\displaystyle A = -\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

   (c) $\displaystyle V = 2\pi \int_1^2 x f(x)\,\mathrm{d}x = \pi \ln 2 + \frac{\pi^2}{2}$.

2. (a) Absolutamente convergente;

   (b) Divergente;

   (c) Absolutamente convergente;

   (d) Simplesmente convergente.

3. (a) $f^{(999)}(0) = -998!$.

   (b) $D =]-1, 1[$.

   (c) $\displaystyle f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$, logo $\displaystyle f(x) = P\frac{1}{1+x^2} = \arctan(x)$.

4. $\displaystyle P(x) = 1 + x\ln 2 + \frac{x^2 \ln^2 2}{2}$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \ln 2$.