

1. Estude quanto à convergência o integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx$.

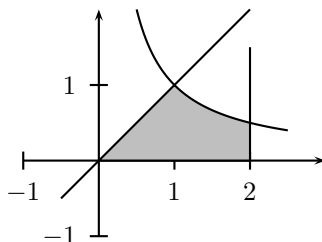
Resolução. Como $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$, o integral considerado é um integral impróprio de 2ª espécie e temos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, dx = \lim_{c \rightarrow \frac{\pi}{2}} \int_0^c \tan x = \lim_{c \rightarrow \frac{\pi}{2}} [-\ln |\cos x|]_0^c = \lim_{c \rightarrow \frac{\pi}{2}} (-\ln |\cos c| + 0) = -\ln 0 = +\infty,$$

e portanto o integral é divergente.

2. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo dos xx da figura limitada por $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$ e $x = 2$.

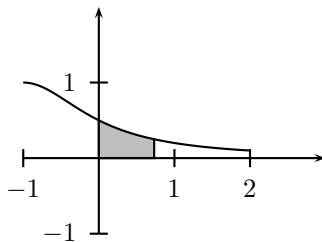
Resolução. A figura limitada por $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$ e $x = 2$ é a figura representada no gráfico seguinte:



$$V = \pi \int_0^1 x^2 \, dx + \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2} \, dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}.$$

3. Calcule a área de $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{3} - 1 \wedge 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \right\}$.

Resolução. O conjunto $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{3} - 1 \wedge 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \right\}$ é a figura representada no gráfico seguinte:



$$A = \int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \, dx = [\arctan(x+1)]_0^{\sqrt{3}-1} = \arctan \sqrt{3} - \arctan 1 = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}.$$

4. Utilize o critério de D'Alembert (da razão) para determinar a convergência das séries:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n};$$

Resolução. Sendo $a_n = \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$, então $a_{n+1} = \frac{2n+1}{(\sqrt{2})^{n+1}}$, e

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{2n+1}{(\sqrt{2})^{n+1}}}{\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}} = \lim \frac{(2n+1)(\sqrt{2})^n}{(2n-1)(\sqrt{2})^{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1.$$

Logo, a série é convergente.

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)}.$$

Resolução. Sendo $a_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)}$, então $a_{n+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)(3n+2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)(4n+1)}$, e

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)(3n+2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)(4n+1)}}{\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)}} = \lim \frac{3n+2}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1.$$

Logo, a série é convergente.

5. Utilize o critério de Cauchy (da raiz) para determinar a convergência das séries:

$$(a) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n;$$

Resolução. Sendo $a_n = \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n$, então

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n} = \lim \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Logo, a série é convergente.

$$(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}.$$

Resolução. Sendo $a_n = \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}$, então

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2n-1}} = \lim \left(\frac{n}{3n-1} \right)^{2-\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{9} < 1.$$

Logo, a série é convergente.

6. Determine o intervalo de convergência das seguintes séries de potências e investigue, se possível, a convergência nos extremos deste intervalo:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

Resolução. Sendo $a_n = \frac{1}{n!}$, então

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty.$$

Assim, a série é convergente em $] -\infty, +\infty[$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$.

Resolução. Sendo $a_n = \frac{1}{n2^n}$, então

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n2^n}}{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot 2 = 2.$$

Assim, a série é convergente em $] -2, 2[$.

Para $x = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é a série harmônica, e logo é divergente.

Para $x = -2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente, pelo critério de Leibniz.

7. Considere a série de Taylor: $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n$.

(a) Calcule $f^{(1234)}(0)$.

Resolução. Como S é uma série de Taylor, temos que $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Então,

$$\frac{f^{(1234)}(0)}{1234!} = (-1)^{1234} 2^{1234} \Leftrightarrow f^{(1234)}(0) = 1234! \cdot 2^{1234}.$$

(b) Mostre que $S = \frac{1}{1+2x}$.

Resolução. A série S pode ser escrita na forma $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n$. Como esta é uma série geométrica, vem que $S = \frac{1}{1 - (-2x)} = \frac{1}{1+2x}$, para $x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right[$.