ISEL

Análise Matemática I

Departamento de Engenharia Mecânica

Teste Global - Modelo

Leia atentamente o enunciado antes de iniciar a resolução do teste e apresente todos os cálculos que efectuar.

Duração: 2h00m

(2.0) 1. Determine o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de $\{x \in \mathbb{R} : \; x^3 \geq x\}$.

(2.0) 2. Determine o domínio, intervalos de monotonia e extremos relativos da função $f(x) = \ln|1+x|$.

(2.0) 3. Calcule o limite $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\sin^2 x}{x^4} \right)$.

(2.0) 4. Utilize o método da primitivação por partes, apresentando todos os cálculos, para obter uma primitiva de $f(x) = \ln^2 x$.

(2.0) 5. Estude quanto à convergência o integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}$.

(2.0) 6. Calcule a área limitada pelo gráfico de $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$ e pelo eixo dos xx.

7. Estude quanto à convergência simples e absoluta as seguintes séries:

(2.0) (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}$;

(2.0) (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$.

8. Considere a seguinte série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

(2.0) (a) Calcule $f^{(999)}(0)$.

(2.0) (b) Mostre que $f(x) = \arctan(x)$ em $]-1, 1[$.

Soluções

1. Interior$=]-1,0[\cup]1,+\infty[$, fronteira$= \{-1,0,1\}$, conj. pontos de acumulação$= [-1,0] \cup [1,+\infty[$.

2. $D = \{x \in \mathbb{R} : |1+x| > 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, decrescente em $]-\infty,-1[$, crescente em $]-1,+\infty[$ e não tem extremos relativos.

3. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin^2 x}{x^4}\right) = \frac{1}{3}$.

4. $P\ln^2 x = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$.

5. Divergente.

6. $\displaystyle A = -\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

7. (a) Divergente;
   (b) Simplesmente convergente.

8. (a) $f^{(999)}(0) = -998!$.
   (b) $\displaystyle f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$, logo $\displaystyle f(x) = P\frac{1}{1+x^2} = \arctan(x)$.