ISEL

Análise Matemática I

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução do Teste Global - 06/01/2007

1. Determine o interior, a fronteira, e o conjunto dos pontos de acumulação do conjunto $\{x : x^3 > x\}$.

Resolução. Sendo $A = \{x : x^3 > x\}$, como

$$x^3 > x \Leftrightarrow x^3 - x > 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) > 0,$$

fazendo o quadro dos sinais,

	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

obtemos $A =]-1,0[\cup]1,+\infty[$.

Então $\text{int}(A) =]-1,0[\cup]1,+\infty[$, $\text{fr}(A) = \{-1,0,1\}$ e $A' = [-1,0] \cup [1,+\infty[$.

2. Determine o domínio, sentidos das concavidades e pontos de inflexão de $f(x) = \arctan 2x$.

Resolução. $D = \mathbb{R}$.

Temos que $f'(x) = \dfrac{2}{1+4x^2}$ e $f''(x) = -\dfrac{16x}{(1+4x^2)^2}$. Como $(1+4x^2)^2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, vem que $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$. Logo f tem concavidade virada para cima em $]-\infty, 0[$, concavidade virada para baixo em $]0,+\infty[$ e tem um ponto de inflexão para $x = 0$.

3. Calcule o limite $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

Resolução. Como $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x} = 0^0$ e

$$\begin{aligned}
\ln \lim_{x\to 0} x^{\sin x} &= \lim_{x\to 0} \sin x \ln x \overset{0\times\infty}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \underset{R.C.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{\sin^2 x}{x\cos x} \underset{R.C.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} -\frac{2\sin x\cos x}{\cos x - x\sin x} = 0,
\end{aligned}$$

vem que $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x} = \mathrm{e}^0 = 1$.

4. Primitive, apresentando todos os cálculos, a função $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2+2x+1}{(x^2+2x+2)(x^2+1)}$.

Resolução. Como $(x^2+2x+2)(x^2+1)$ tem dois pares de raízes complexas simples, vem que

$$\frac{x^3+3x^2+2x+1}{(x^2+2x+2)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{(x^2+2x+2)} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Logo $x^3+3x^2+2x+1 = (Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2x+2)$, donde obtemos $A=0$, $B=1$, $C=1$ e $D=0$. Assim,

$$\begin{aligned}
P\frac{x^3+3x^2+2x+1}{(x^2+2x+2)(x^2+1)} &= P\left(\frac{1}{(x^2+2x+2)} + \frac{x}{x^2+1}\right) \\
&= P\frac{1}{(x+1)^2+1} + \frac{1}{2}P\frac{2x}{x^2+1} \\
&= \arctan(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1).
\end{aligned}$$

5. Estude quanto à convergência o integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, \mathrm{d}x$.

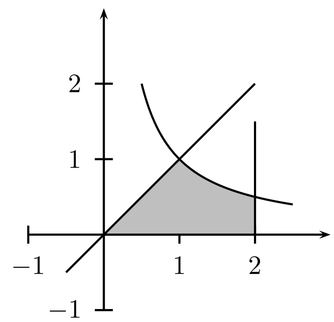
Resolução. Como $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$, o integral considerado é um integral impróprio de 2ª espécie e temos que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x \, \mathrm{d}x = \lim_{c\to\frac{\pi}{2}} \int_0^c \tan x = \lim_{c\to\frac{\pi}{2}} \big[-\ln|\cos x| \big]_0^c = \lim_{c\to\frac{\pi}{2}} (-\ln|\cos c| + 0) = -\ln 0 = +\infty,$$

e portanto o integral é divergente.

6. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo dos xx da figura limitada por $y = x$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 0$ e $x = 2$.

Resolução. A figura limitada por $y = x$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = 0$ e $x = 2$ é a figura representada no gráfico seguinte:



$$V = \pi \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x + \pi \int_1^2 \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 + \pi \left[-\frac{1}{x} \right]_1^2 = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}.$$

7. Utilize o critério de D'Alembert (da razão) para determinar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8 \ldots (3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9 \ldots (4n-3)}.$$

Resolução. Sendo $a_n = \dfrac{2\cdot 5\cdot 8 \ldots (3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9 \ldots (4n-3)}$, então $a_{n+1} = \dfrac{2\cdot 5\cdot 8 \ldots (3n-1)(3n+2)}{1\cdot 5\cdot 9 \ldots (4n-3)(4n+1)}$, e

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{2\cdot 5\cdot 8 \ldots (3n-1)(3n+2)}{1\cdot 5\cdot 9 \ldots (4n-3)(4n+1)}}{\dfrac{2\cdot 5\cdot 8 \ldots (3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9 \ldots (4n-3)}} = \lim \frac{3n+2}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1.$$

Logo, a série é convergente.

8. Utilize o critério de Cauchy (da raíz) para determinar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n.$$

Resolução. Sendo $a_n = \left(\dfrac{n+1}{2n-1} \right)^n$, então

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n} = \lim \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Logo, a série é convergente.

9. Determine o intervalo de convergência das seguintes séries de potências e investigue, se possível, a convergência nos extremos deste intervalo:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$;

   Resolução. Sendo $a_n = \dfrac{1}{n!}$, então

$$R = \lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = \lim(n+1) = +\infty.$$

   Assim, a série é convergente em $]-\infty, +\infty[$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$.

   Resolução. Sendo $a_n = \dfrac{1}{n2^n}$, então

$$R = \lim \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim \frac{\frac{1}{n2^n}}{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}} = \lim \frac{(n+1)2^{n+1}}{n2^n} = \lim \frac{n+1}{n} \cdot 2 = 2.$$

   Assim, a série é convergente em $]-2, 2[$.

   Para $x = 2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ é a série harmónica, e logo é divergente.

   Para $x = -2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ é convergente, pelo critério de Leibniz.