ISEL

Análise Matemática I

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução do Exame 2 - 12/07/2006

---

1. Considere a função $f(x) = \ln|x^2 - 1|$.

   (a) Indique o domínio de f e determine as assímptotas ao gráfico de f.

   (b) Calcule os zeros de f e os seus intervalos de monotonia.

   (c) Verifique que f' não tem zeros no intervalo $]0, \sqrt{2}[$. Este facto não contradiz o Teorema de Rolle. Justifique.

   Resolução.

   (a) Temos que $D = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 1| > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. Como

$$\lim_{x \to -1} \ln|x^2 - 1| = \lim_{x \to 1} \ln|x^2 - 1| = -\infty,$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\ln|x^2 - 1|}{x} = 0 \text{ e}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \ln|x^2 - 1| = +\infty,$$

   as rectas $x = -1$ e $x = 1$ são as únicas assímptotas ao gráfico de f.

   (b) Como $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln|x^2 - 1| = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 1| = e^0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 \vee x^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2} \vee x = 0$, os zeros de f são $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ e 0.

   Observemos que

$$f(x) = \ln|x^2 - 1| = \begin{cases} \ln(x^2 - 1) & \text{se } |x| > 1 \\ \ln(1 - x^2) & \text{se } |x| < 1 \end{cases}.$$

   Então

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x^2 - 1} & \text{se } |x| > 1 \\ \dfrac{-2x}{1 - x^2} & \text{se } |x| < 1 \end{cases} = \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$2x$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	s/s	$+$	0	$-$	s/s	$+$
$f(x)$	$\searrow$	s/s	$\nearrow$	M	$\searrow$	s/s	$\nearrow$

   (c) Como $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, podemos concluir que f' não tem zeros no intervalo $]0, \sqrt{2}[$. Este facto não contradiz o Teorema de Rolle porque f não satisfaz as condições do Teorema: como não está definida em $1 \in [0, \sqrt{2}]$, não é contínua em $[0, \sqrt{2}]$ nem diferenciável em $]0, \sqrt{2}[$.

2. Considere $h(x) = \arctan(g(x))$, onde $g(x)$ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $g(-1) = 1$ e $g'(-1) = 3$. Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de h no ponto $x = -1$.

Resolução. Uma equação da recta tangente ao gráfico de h no ponto $x=-1$ é

$$y-h(-1)=h'(-1)(x+1).$$

Como $h(-1)=\arctan(g(-1))=\arctan(1)=\dfrac{\pi}{4}$, $h'(x)=\dfrac{g'(x)}{1-g^2(x)}$ e $h'(-1)=\dfrac{3}{1+1}=\dfrac{3}{2}$, uma equação da recta tangente é $y-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}(x+1)$.

3. Calcule, caso exista, o limite $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x\sin x}$.

   Resolução. Temos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t}{x\sin x}\underset{R.C.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{2x\mathrm{e}^{-x^4}}{\sin x+x\cos x}\underset{R.C.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{e}^{-x^4}-8x^4\mathrm{e}^{-x^4}}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{2+0}{1+1-0}=1.$$

4. Calcule uma primitiva de $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$.

   Resolução. Consideremos a substituição $t=\sqrt[6]{x}$. Então $\varphi(t)=t^6$, $\varphi'(t)=6t^5$ e

$$P\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}=P\frac{t^3}{1+t^2}\cdot 6t^5=6P\frac{t^8}{1+t^2}.$$

   Dividindo os polinómios,

$$\begin{array}{llll|l}
t^8 & & & & t^2+1 \\ \cline{5-5}
-t^8 & -t^6 & & & t^6-t^4+t^2-1 \\ \cline{1-2}
 & -t^6 & & & \\
 & t^6 & +t^4 & & \\ \cline{2-3}
 & & t^4 & & \\
 & & -t^4 & -t^2 & \\ \cline{3-4}
 & & & -t^2 & \\
 & & & t^2 \quad +1 & \\ \cline{4-4}
 & & & 1 &
\end{array}$$

   vem que

$$\begin{aligned}
P\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} &= 6P\frac{t^8}{1+t^2}=6P\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{1+t^2}\right)\\
&= 6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\arctan t\right)\\
&= \frac{6}{7}\sqrt[6]{x^7}-\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}-6\sqrt[6]{x}+6\arctan\sqrt[6]{x}.
\end{aligned}$$

5. Calcule uma primitiva de $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-3x}$.

   Resolução. Por partes, considerando $u'=\mathrm{e}^{-3x}$ e $v=x^2$. Então $u=-\dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}$ e $v'=2x$, e

$$Px^2\mathrm{e}^{-3x}=-\frac{1}{3}x^2\mathrm{e}^{-3x}+\frac{2}{3}Px\mathrm{e}^{-3x}.$$

Novamente por partes, considerando $u' = \mathrm{e}^{-3x}$ e $v = x$, vem que $u = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}$, $v' = 1$, e

$$Px^2\mathrm{e}^{-3x} = -\frac{1}{3}x^2\mathrm{e}^{-3x} - \frac{2}{9}x\mathrm{e}^{-3x} + \frac{2}{9}P\mathrm{e}^{-3x} = -\frac{1}{3}x^2\mathrm{e}^{-3x} - \frac{2}{9}x\mathrm{e}^{-3x} + \frac{2}{27}\mathrm{e}^{-3x}.$$

6. Calcule $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+7x+8}{x(x+2)^2}\,\mathrm{d}x$.

Resolução. A função $f(x) = \dfrac{x^2+7x+8}{x(x+2)^2}$ é uma função racional. Como o denominador tem uma raíz real simples e uma raíz real de multiplicidade 2, vem que

$$\frac{x^2+7x+8}{x(x+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$$

Então $x^2+7x+8 = A(x^2+4x+4) + B(x^2+2x) + Cx$, donde obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 4A+2B+C=7 \\ 4A=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \\ C=1 \end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x^2+7x+8}{x(x+2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2}\right)\mathrm{d}x = \left[2\ln|x| - \ln|x+2| - \frac{1}{x+2}\right]_1^2 \\ &= 2\ln 2 - \ln 4 - \frac{1}{4} + \ln 2 + \frac{1}{3} = \ln 2 + \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

7. Estude a convergência do integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,\mathrm{d}x$.

Resolução. Como $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$, o integral é um integral impróprio de 2ª espécie. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,\mathrm{d}x &= \lim_{c\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^c \tan x = \lim_{c\to\frac{\pi}{2}^-}\big[-\ln|\cos x|\big]_0^c \\ &= \lim_{c\to\frac{\pi}{2}^-}(-\ln|\cos c| + \ln|\cos 0|) = -\ln 0 + \ln 1 = -\infty,\end{aligned}$$

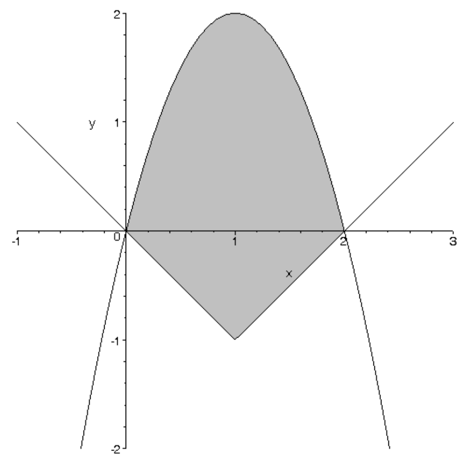
e o integral é divergente.

8. Calcule a área da figura limitada pelas curvas $y = 4x - 2x^2$ e $y = |x-1| - 1$.

Resolução. Comecemos por observar que $4x - 2x^2 = 2x(2-x)$ e que

$$|x-1| - 1 = \begin{cases} x-2 & \text{se } x \geq 1 \\ -x & \text{se } x < 1 \end{cases}.$$

Assim, a região plana limitada pelas duas funções é a região representada no gráfico seguinte:



$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^2 (4x - 2x^2 - |x-1| + 1)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (4x - 2x^2 + x)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (4x - 2x^2 - x + 2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (5x - 2x^2)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (3x - 2x^2 + 2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{5x^2}{2} - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + 2x\right]_1^2 = \frac{11}{3}.
\end{aligned}
$$