Análise Matemática I

ISEL

Departamento de Engenharia Mecânica

Resolução do Teste 2 (Repetição) - 26/06/2006

---

1. Calcule uma primitiva de:

   (a) $f(x) = 3x^5 \ln x^3$;

   Resolução. Utilizando o método de primitivação por partes,

$$P\,3x^5 \ln x^3 = 3\,\frac{x^6}{6}\ln x^3 - P\,3\,\frac{x^6}{6}\,\frac{3x^2}{x^3} = \frac{x^6}{2}\ln x^3 - \frac{3}{2}Px^5 = \frac{x^6}{2}\ln x^3 - \frac{x^6}{4}.$$

   (b) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2(x^2+1)}$.

   Resolução. Trata-se de uma função racional (própria). O denominador tem a raiz real dupla 0 e contém o factor quadrático irredutível (x^2+1), pelo que a decomposição em fracções simples terá a forma:

$$\frac{x^2-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

   Reduzindo ao mesmo denominador e igualando os numeradores tem-se:

$$x^2 - 1 = A_1 x(x^2+1) + A_2(x^2+1) + (Bx+C)x^2.$$

   Igualando os termos do mesmo grau, obtém-se o sistema

$$\begin{cases} A_1 + B &= 0 \\ A_2 + C &= 1 \\ A_1 &= 0 \\ A_2 &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 &= 0 \\ A_2 &= -1 \\ B &= 0 \\ C &= 2 \end{cases}$$

   Substituindo na expressão acima, a primitivação é agora imediata:

$$P\,\frac{x^2-1}{x^2(x^2+1)} = P\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2+1}\right) = \frac{1}{x} + 2\arctan x.$$

2. Determine a primitiva $F(x)$ de $f(x) = \dfrac{\sin x \cos x}{2-\cos^2 x}$ que verifica $F(\pi) = 2$.

   Resolução.

$$\begin{aligned} P\,\frac{\sin x\cos x}{2-\cos^2 x} &= \frac{1}{2}P\,\frac{-2\cos x(-\sin x)}{2-\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{2}\ln|2-\cos^2 x| + C. \end{aligned}$$

   Impondo a condição $F(\pi) = 2$ tem-se $\frac{1}{2}\ln|2-\cos^2\pi| + C = C = 2$, logo

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln|2-\cos^2 x| + 2.$$

3. Mostre que a função $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{0} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ é crescente no intervalo $[\pi^2, 4\pi^2]$.

Resolução. $F(x) = -\int_0^{\sqrt{x}} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ é (a menos de um sinal) a composta da função integral indefinido $\phi(u) = \int_0^u \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ com a função $\sqrt{x}$. Como a função integranda é contínua em $\mathbb{R}^+$, resulta do Teorema Fundamental que ϕ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$. A função $\sqrt{x}$ é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e toma, neste intervalo, valores estritamente positivos. Portanto, F é diferenciável em $\mathbb{R}^+$ e em particular, no intervalo $[\pi^2, 4\pi^2]$. Segundo um corolário do Teorema de Lagrange, nestas condições F é crescente nesse intervalo se $F'(x) \geq 0$ para $x \in [\pi^2, 4\pi^2]$.

Ainda do Teorema Fundamental,

$$F'(x) = -\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2x}.$$

No intervalo em causa,

$$\pi^2 \leq x \leq 4\pi^2 \Rightarrow \pi \leq \sqrt{x} \leq 2\pi \Rightarrow \sin\sqrt{x} \leq 0.$$

Então $F'(x) \geq 0$ e F é crescente em $[\pi^2, 4\pi^2]$.

4. Calcule:

(a) $\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{3\ln^2 x - 3}{x(\ln^3 x - 3\ln x)}\,\mathrm{d}x$;

Resolução. Fazendo a substituição $\ln x = t$, tem-se $x = \mathrm{e}^t$ e $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^t$. O intervalo $[1, 2]$ é aplicado sobrejectivamente no intervalo $[\mathrm{e}, \mathrm{e}^2]$ e:

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{3\ln^2 x - 3}{x(\ln^3 x - 3\ln x)}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{3t^2-3}{\mathrm{e}^t(t^3-3t)}\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{3t^2-3}{t^3-3t}\,\mathrm{d}t = \big[\ln|t^3-3t|\big]_1^2 = 0.$$

(b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin 2x\,\mathrm{d}x$.

Resolução. Usando o método de integração por partes:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin 2x\ \mathrm{d}x &= \big[x\arcsin 2x\big]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} x\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\left[\frac{(1-4x^2)^{1/2}}{1/2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

5. Determine os valores de a para os quais o valor do integral $\int_0^{\pi} \sin x(a - \cos x)\,\mathrm{d}x$ é um número inteiro.

Resolução.

$$\int_0^{\pi} \sin x(a-\cos x)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{(a-\cos x)^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}\left((a-(-1))^2 - (a-1)^2\right) = 2a.$$

Para que $2a$ seja inteiro, $a = \frac{n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

6. Estude a convergência e calcule, se existir, o valor do integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\, \mathrm{d}x$.

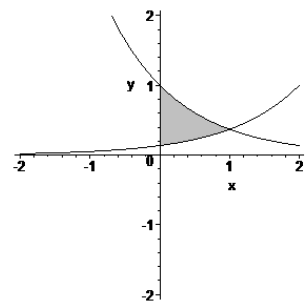
   Resolução. Trata-se de um integral impróprio que é convergente se e só se existir e for finito o limite:

$$\begin{aligned}\lim_{c\to-\infty} \int_c^0 \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\, \mathrm{d}x &= \lim_{c\to-\infty} \left[\arctan \mathrm{e}^x - \frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{2x})\right]_c^0 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

   O integral é convergente e o seu valor é $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2$.

7. Calcule a área da figura limitada pelas curvas $y = \mathrm{e}^{-x}$, $y = \mathrm{e}^{x-2}$ e $x = 0$.

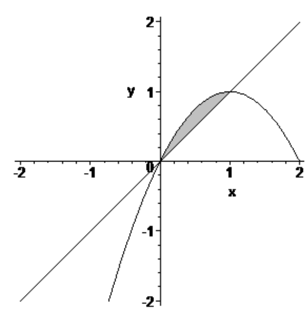
   Resolução. A figura limitada pelas curvas é a região representada no gráfico seguinte:



$$A = \int_0^1 (\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x-2})\, \mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x-2}\right]_0^1 = -2\mathrm{e}^{-1} + 1 + \mathrm{e}^{-2}.$$

8. Calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação em torno do eixo dos xx da região limitada por $y = 2x - x^2$, e $y = x$.

   Resolução. A região limitada por $y = 2x - x^2$, e $y = x$ é a representada no gráfico seguinte:



$$V = \pi \int_0^1 (2x - x^2)^2\, \mathrm{d}x - \pi \int_0^1 x^2\, \mathrm{d}x = \pi \left[x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{5}.$$