---

1. Seja $f$ a função definida por
$$f(x) = \begin{cases} 1 + \mathrm{e}^{-x^2} & \text{se } x < 0 \\ |x-2| & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

   (a) Indique o domínio de $f$ e o conjunto de pontos em que $f$ é diferenciável.

   (b) Verifique se $f$ é prolongável por continuidade ao ponto $x = 0$. Justifique; em caso afirmativo, defina o prolongamento.

   **Resolução.**

   (a) A função $1+\mathrm{e}^{-x^2}$ está definida em $]-\infty, 0[$ e $|x-2|$ está definida em $]0,+\infty[$. Logo, $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. $1 + \mathrm{e}^{-x^2}$ é diferenciável em $]-\infty, 0[$ por ser a soma da função constante 1 com a composta da funçao polinomial $-x^2$ com a função exponencial, ambas diferenciáveis em $\mathbb{R}$. No intervalo $]0, 2[$, $f(x) = 2-x$ é diferenciável (polinomial); no intervalo $]2, +\infty[$, $f(x) = x-2$ é diferenciável (idem). No ponto 2, tem-se:
$$\left.\begin{array}{l} f'_e(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{(2-x)-0}{x-2} = -1 \\ f'_d(2) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{(x-2)-0}{x-2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ não existe } f'(2)$$
   O conjunto de pontos em que $f$ é diferenciável é $D\backslash\{2\} = \mathbb{R}\backslash\{0, 2\}$.

   (b) Tem-se que: 0 é ponto de acumulação de $D$ e
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 1 + \mathrm{e}^{-x^2} = 1 + \mathrm{e}^0 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} |x-2| = |-2| = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 2$$
   O prolongamento por continuidade $\bar{f}$ é definido por
$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 1 + \mathrm{e}^{-x^2} & \text{se } x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ |x-2| & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

2. Verifique se é possível aplicar o Teorema de Rolle a $f(x) = \arctan(x-1)^2$ no intervalo $[0, 2]$. Caso seja, calcule o(s) ponto(s) em que a derivada se anula.

   **Resolução.** A função $f(x) = \arctan(x-1)^2$ é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, e portanto é contínua em $[0, 2]$ e diferenciável em $]0, 2[$. Como $f(0) = \arctan(-1)^2 = \arctan 1 = f(2)$, é possível aplicar o Teorema de Rolle a $f$ no intervalo dado. Assim, existe $c \in ]0, 2[$ tal que $f'(c) = 0$, ou seja,
$$\frac{2(c-1)}{1+(c-1)^4} = 0 \Leftrightarrow c = 1.$$

3. Seja $h(x) = f(g(x))$, em que $f$ e $g$ são funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Supondo
$$f(-1) = 2, \quad f'(-1) = \frac{1}{3}, \quad g(3) = -1, \quad g'(3) = -4,$$
   escreva uma equação da recta tangente ao gráfico de $h$ no ponto $(3, h(3))$

**Resolução.** A equação da recta na forma $y - y_0 = m(x - x_0)$ obtém-se de:

$x_0 = 3$,

$y_0 = h(3) = f(g(3)) = f(-1) = 2$,

$m = h'(3) = f'(g(3))\, g'(3) = f'(-1) \cdot (-4) = \dfrac{1}{3} \cdot (-4) = -\dfrac{4}{3}$.

Uma equação da recta tangente ao gráfico de $h$ no ponto $(3, h(3))$ é portanto

$$y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 3).$$

4. Calcule, caso exista, o limite

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 \mathrm{e}^{-x}.$$

**Resolução.**

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 \mathrm{e}^{-x} \overset{\infty \times 0}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{\mathrm{e}^x} \underset{R.C.}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{\mathrm{e}^x} \underset{R.C.}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{6x}{\mathrm{e}^x} \underset{R.C.}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x \to +\infty} \frac{6}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

5. Considere a função $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$. Determine:

(a) O domínio de $f$ e os pontos em que $f$ é contínua.

(b) As assímptotas ao gráfico de $f$.

(c) Os intervalos de monotonia e extremos relativos de $f$.

(d) O sentido das concavidades de $f$ e os seus pontos de inflexão.

**Resolução.**

(a) O domínio de $f$ é $\mathbb{R} \backslash \{1\}$.
Como $f$ é quociente de duas funções polinomiais (que são contínuas), é contínua em $D$.

(b) Como $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = +\infty$, e $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x-1} = -\infty$, $x = 1$ é assímptota vertical ao gráfico de $f$.
Temos que

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1$$

e

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - 1x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x-1} - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1,$$

a recta $y = x + 1$ é assímptota não vertical ao gráfico de $f$ em $+\infty$ e em $-\infty$.

(c) Temos que $f'(x) = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

| | $-\infty$ | 0 | | 1 | | 2 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-2$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $(x-1)^2$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ | 0 | $-$ | $s/s$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $M$ | $\searrow$ | $s/s$ | $\searrow$ | $m$ | $\nearrow$ |

Assim, $f$ é crescente em $]-\infty, 0[$ e em $]2, +\infty[$, é decrescente em $]0, 2[\backslash\{1\}$ e tem um máximo local 0 em $x = 0$ e um mínimo local 4 em $x = 2$.

(d) Temos que $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$.

| | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $(x-1)^3$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $s/s$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\cap$ | $s/s$ | $\cup$ |

Assim, $f$ tem concavidade virada para cima em $]1, +\infty[$, virada para baixo em $]-\infty, 1[$, e não tem pontos de inflexão.

6. Determine o polinómio de Taylor de grau 3 da função $f(x) = \ln(1+x)$ em torno do ponto $a = 0$, e utilize-o para calcular um valor aproximado de $\ln \dfrac{3}{2}$.

**Resolução.**

$$\begin{array}{ll} f(x) = \ln(1+x) & f(0) = 0 \\ f'(x) = \dfrac{1}{1+x} & f'(0) = 1 \\ f''(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} & f''(0) = -1 \\ f'''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} & f'''(0) = 2 \end{array}$$

O polinómio de Taylor de grau 3 é:

$$P_3(x) = 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Um valor aproximado de $\ln \dfrac{3}{2} = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2}\right)$ obtém-se calculando

$$P_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{12}.$$