

1. Considere a função $f(x) = \frac{|x-1|}{x+1}$

- (a) Determine o domínio de f e o conjunto de pontos em que f é contínua.
 (b) Determine todas as assíntotas ao gráfico de f .
 (c) Verifique se é possível aplicar o Teorema de Rolle a f , no intervalo $\left[\frac{1}{3}, 3\right]$. Justifique a resposta.

Resolução. (a) O domínio de f é $D = \{x \in \mathbb{R} : x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. As funções $|x-1|$ e $x+1$ são contínuas em \mathbb{R} , logo o quociente é uma função contínua no domínio, ou seja, em $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- (b) • $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$, logo $y = 1$ é assíntota horizontal quando $x \rightarrow +\infty$;
 • $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x+1}{x+1} = -1$, logo $y = -1$ é assíntota horizontal quando $x \rightarrow -\infty$;
 • $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{|x-1|}{x+1} = \frac{2}{0^\pm} = \pm\infty$, logo $x = -1$ é assíntota vertical (bilateral).

- (c) A função f não é diferenciável no intervalo $\left]\frac{1}{3}, 3\right[$, visto que $f'_e(1) = -\frac{1}{2}$ e $f'_d(1) = \frac{1}{2}$; não satisfaz, portanto, uma das hipóteses do Teorema de Rolle.

2. Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$.

Resolução. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = -1$ (ou aplicar a regra de Cauchy).

3. Escreva o polinómio de Taylor de grau 3 em torno do ponto $x = 0$ para a função $g(x) = \operatorname{arctg} x$ e aproveite-o para calcular um valor aproximado de $\frac{\pi}{4}$.

Resolução. De:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{arctg} x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\frac{2(1+x^2)^2 - 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} & f'''(0) &= -2 \end{aligned}$$

obtém-se o polinómio: $P_3(x) = x - \frac{2}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{3}$.

Um valor aproximado de $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1$ é $P_3(1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

4. Calcule uma primitiva de $f(x) = \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 1}$.

Resolução. Consideremos a substituição $\varphi(t) = \ln t$. Então $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$, e

$$\begin{aligned} P \frac{e^{2x} + e^x}{e^{2x} + 1} &= P \frac{t^2 + t}{t^2 + 1} \cdot \frac{1}{t} = P \frac{t + 1}{t^2 + 1} = P \frac{t}{t^2 + 1} + P \frac{1}{t^2 + 1} = \\ &= P \frac{1}{2} \frac{2t}{t^2 + 1} + \arctan t = \frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) + \arctan t = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + \arctan e^x. \end{aligned}$$

5. Seja $F(x) = \int_{x^2}^{c \ln x} e^{-t^2} dt$. Calcule a constante c tal que $F'(1) = 0$.

Resolução. Pela regra de Leibnitz, temos que $F'(x) = e^{-(c \ln x)^2} \cdot \frac{c}{x} - e^{-x^4} \cdot 2x$. Logo

$$F'(1) = 0 \Leftrightarrow e^{-(c \ln 1)^2} \cdot \frac{c}{1} - e^{-1^4} \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow c - 2e^{-1} = 0 \Leftrightarrow c = 2e^{-1}.$$

6. Calcule $\int_0^1 e^{2x} \sin x dx$;

Resolução. Calculemos $P e^{2x} \sin x$ por partes, fazendo $u' = \sin x$ e $v = e^{2x}$. Então $u = -\cos x$ e $v' = 2e^{2x}$, e

$$P e^{2x} \sin x = -e^{2x} \cos x - P - \cos x 2e^{2x} = -e^{2x} \cos x + 2P \cos x e^{2x}.$$

Também por partes, calculemos $P \cos x e^{2x}$. Fazendo $u' = \cos x$ e $v = e^{2x}$, então $u = \sin x$ e $v' = 2e^{2x}$, donde

$$P \cos x e^{2x} = e^{2x} \sin x - P \sin x 2e^{2x} = e^{2x} \sin x - 2P \sin x e^{2x}.$$

Substituindo, vem que

$$P e^{2x} \sin x = -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4P \sin x e^{2x} \Leftrightarrow P e^{2x} \sin x = \frac{1}{5} (-e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x).$$

$$\text{Assim, } \int_0^1 e^{2x} \sin x dx = \left[\frac{1}{5} (-e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x) \right]_0^1 = \frac{1}{5} (-e^2 \cos 1 + 2e^2 \sin 1 + 1).$$

7. Estude quanto à convergência, o integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx$.

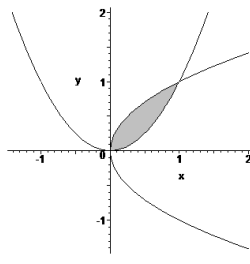
Resolução.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx &= \int_{-\infty}^0 \frac{x}{1+x^4} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \int_c^0 \frac{x}{1+x^4} dx + \lim_{d \rightarrow +\infty} \int_0^d \frac{x}{1+x^4} dx \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{2} \arctan x^2 \right]_c^0 + \lim_{d \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \arctan x^2 \right]_0^d \\ &= \lim_{c \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \arctan 0 - \frac{1}{2} \arctan c^2 \right) + \lim_{d \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \arctan d^2 - \frac{1}{2} \arctan 0 \right) \\ &= 0 - \frac{1}{2} \arctan(+\infty) + \frac{1}{2} \arctan(+\infty) = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = 0, \end{aligned}$$

e portanto o integral é convergente.

8. Calcule a área da figura limitada pelas curvas $y = x^2$ e $x = y^2$.

Resolução. Observemos que as curvas se intersectam em $x = 0$ e em $x = 1$: $x^2 = \sqrt{x} \Leftrightarrow x^4 = x \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$.



$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$