

1. Determine o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação do conjunto $A = [1, \pi] \cap \mathbb{Q}$.

Resolução. Temos $\text{int } A = \emptyset$, $\text{fr } A = [1, \pi]$ e $A' = [1, \pi]$.

2. Considere a função real de variável real definida por:

$$g(x) = \begin{cases} -2x + m & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ 2 \tan\left(\frac{x\pi}{4}\right) - x & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

com $m \in \mathbb{R}$.

- (a) Determine o(s) valor(es) de m para os quais a função g é contínua.

Resolução. Observemos que $D = [-1, 2]$.

A função g é contínua em $D \setminus \{1\}$. Será contínua em 1 se $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$. Como

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = g(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -2 + m,$$

g será contínua se $1 = -2 + m$, ou seja, se $m = 3$.

- (b) Considere $m = 1$. Calcule as derivadas laterais no ponto $x = 1$.

Resolução. Temos

$$g'_e(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 \tan\left(\frac{x\pi}{4}\right) - x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos^2\left(\frac{x\pi}{4}\right)} - 1 = \pi - 1$$

$$g'_d(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-2x + 1 - 1}{x - 1} = \frac{-2}{0^+} = +\infty.$$

- (c) Considere $m = 1$. Diga, justificando, qual é o valor lógico da seguinte proposição: “Existe pelo menos um $c \in]-1, 2[$ tal que $g(c) = 0$.”

Resolução. A função g é contínua em $[-1, 1]$ e $g(-1) \cdot g(1) = (-1) \cdot 1 < 0$. Logo, pelo corolário do Teorema de Bolzano, a afirmação é verdadeira.

3. Calcule uma primitiva de $f(x) = \sinh(2x) \cosh(2x)$.

Resolução.

$$P \sinh(2x) \cosh(2x) = \frac{1}{2} P 2 \sinh(2x) \cosh(2x) = \frac{1}{4} \cosh^2(2x).$$

4. Seja f uma função contínua em \mathbb{R} . Mostre que, para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\int_{c-b}^{c-a} f(c-x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Resolução. Consideremos a substituição $\varphi(t) = c - t$. Então $\varphi'(t) = -1$, $\varphi^{-1}(c-b) = b$ e $\varphi^{-1}(c-a) = a$, e

$$\int_{c-b}^{c-a} f(c-x) dx = \int_b^a f(t)(-1) dt = \int_a^b f(x) dx.$$

5. Estude quanto à convergência o integral $\int_1^{+\infty} \frac{2x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$.

Resolução. Primitivando por partes, com $u' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$ e $v = \ln x$, vem $u = -\frac{1}{1+x^2}$ e $v' = \frac{1}{x}$, e

$$P \frac{2x \ln x}{(1+x^2)^2} = -\frac{\ln x}{1+x^2} + P \frac{1}{x(1+x^2)}.$$

A função $\frac{1}{x(1+x^2)}$ é uma função racional, e o denominador tem uma raiz real simples e um par de raízes complexas de multiplicidade 1. Assim, $f(x)$ pode ser escrita na forma $f(x) = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$. Resolvendo o sistema, vem que $A = 1$, $B = -1$ e $C = 0$. Logo,

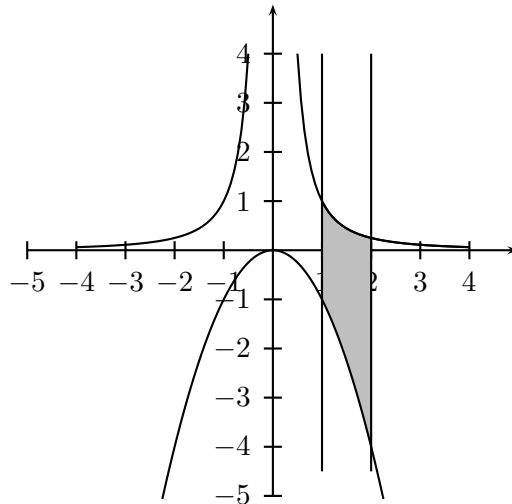
$$P \frac{1}{x(1+x^2)} = P \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) = \ln x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{2x \ln x}{(1+x^2)^2} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{2x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln x}{1+x^2} + \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]_1^b \\ &= 0 + 0 - 0 - \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

6. Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = \frac{1}{x^2}$, $y = -x^2$, $x = 1$ e $x = 2$.

Resolução.



$$A = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - (-x^2) \right) dx = \left[-\frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{17}{6}.$$

7. Estude a natureza das seguintes séries numéricas, e quando for possível, calcule a sua soma:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}.$

Resolução. Como

$$\lim \frac{3^{n+1}(n+1)!}{3^n n!} = \lim \frac{3^{n+1} \cdot n!}{3^n \cdot (n+1)!} = \lim \frac{3}{n+1} = 0 < 1,$$

pelo critério da razão, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$ é convergente.

(b) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}.$

Resolução. A série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ é uma série redutível convergente, com soma

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} &= -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \\ &= -\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 \lim \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

8. Calcule o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n (1 - 2^{-n-1}).$

Resolução. Temos que $a_n = (-1)^n (1 - 2^{-n-1})$ e

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{1 - 2^{-n-1}}{1 - 2^{-n-2}} = 1.$$