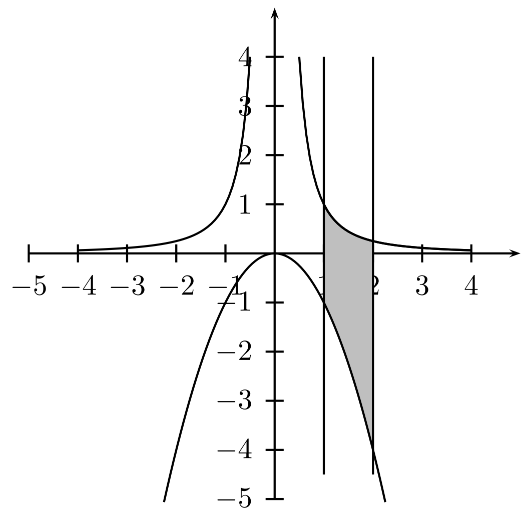
INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA
Departamento de Engenharia Mecânica/Secção de Matemática

Análise Matemática I

Resolução da Repetição do Teste 3 - 02/07/2007

1. Calcule a área da região delimitada pelas curvas $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = -x^2$, $x = 1$ e $x = 2$.

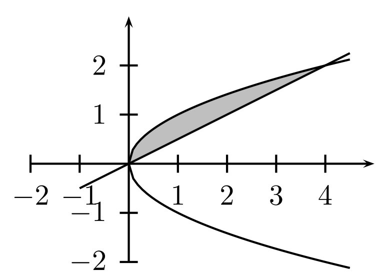
   Resolução.



$$A = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - (-x^2) \right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x} + \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{17}{6}.$$

2. Calcule o volume do sólido de revolução gerado pela rotação em torno do eixo dos yy da região delimitada pelas curvas $y^2 = x$ e $2y = x$.

   Resolução.



$$V = \pi \int_0^2 ((2y)^2 - (y^2)^2)\, \mathrm{d}y = \pi \int_0^2 (4y^2 - y^4)\, \mathrm{d}y = \pi \left[\frac{4y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_0^2 = \frac{64\pi}{15}.$$

3. Estude a natureza das seguintes séries numéricas, e quando for possível, calcule a sua soma:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$.

Resolução. Como

$$\lim \frac{3^{n+1}(n+1)!}{3^n n!} = \lim \frac{3^{n+1}\cdot n!}{3^n \cdot (n+1)!} = \lim \frac{3}{n+1} = 0 < 1,$$

pelo critério da razão, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$ é convergente.

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}$.

Resolução. A série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}}$ é uma série redutível convergente, com soma

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n-1}} &= -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \\ &= -\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - 2\lim \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) = -1 - \frac{1}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Resolução. Como $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e} \neq 0$, pela condição necssária de convergência, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ é divergente.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \ln n}$.

Resolução. Seja $b_n = \dfrac{1}{n + \ln n}$. Como b_n é positiva, $\lim b_n = 0$ e

$$b_{n+1} = \frac{1}{n + 1 + \ln(n+1)} < \frac{1}{n + \ln n} = b_n$$

(ou seja, b_n é decrescente), pelo critério de Leibniz a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \ln n}$ é convergente.

4. Calcule o raio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n (1 - 2^{-n-1})$.

Resolução. Temos que $a_n = (-1)^n(1 - 2^{-n-1})$ e

$$R = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim \frac{1 - 2^{-n-1}}{1 - 2^{-n-2}} = 1.$$

5. Calcule a série de potências da função $f(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2} dt$ em torno de $x = 0$.

Resolução. Temos que $f'(x) = \mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$. Primitivando, vem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

6. Considere a série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n$. Mostre que $Pf(x) = \frac{1}{2}\ln(1+2x)$.

   Resolução. A série $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-2x)^n$ é uma série geométrica, e portanto

   $$f(x) = \frac{1}{1+2x}.$$

   Primitivando, vem

   $$Pf(x) = \frac{1}{2}\ln(1+2x),$$

   como pretendido.

7. Seja $f(x) = \arcsin x$. Sabendo que

   $$f^{(n+1)}(0) - (n-1)^2 f^{(n-1)}(0) = 0,\ n = 1, 2, \ldots,$$

   determine a série de potências de $f(x)$ em torno de $x = 0$.

   Resolução. Observemos que

   $$f^{(n+1)}(0) - (n-1)^2 f^{(n-1)}(0) = 0 \Leftrightarrow f^{(n+1)}(0) = (n-1)^2 f^{(n-1)}(0).$$

   Como $f(0) = 0$ e $f'(0) = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1$, vem que

   $$f^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ par} \\ (2k-1)^2 \cdots 3^2 \cdot 1^2 & \text{se } n = 2k+1 \end{cases}$$

   Logo

   $$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 3^3 \cdots (2n-1)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$