INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Departamento de Engenharia Mecânica/Secção de Matemática

Análise Matemática I

Resolução do Teste 1 - 28/03/2007

---

1. Indique o valor lógico das seguintes proposições:

   (a) $\forall\, x \in \mathbb{R}, x > \dfrac{x}{2}$.

   Resolução. Falso (por exemplo, $0 \not> \dfrac{0}{2}$).

   (b) $\exists\, x \in \mathbb{R} : \ x + 1 = 0$.

   Resolução. Verdadeiro (basta tomar $x = -1$).

2. Considere os conjuntos A, B e $X = A \cup B$, sendo

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x + 1 < \frac{1}{x+1} \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

   (a) Mostre que $X \subset]-\infty, 1]$.

   Resolução. Como $x + 1 < \dfrac{1}{x+1} \Leftrightarrow x < -2 \vee -1 < x < 0$, $A =]-\infty, -2[\cup]-1, 0[$.
   Como $B \subset \left[-\dfrac{1}{2}, 1 \right]$, vem que $X \subset]-\infty, 1]$.

   (b) Indique $\mathrm{int}(X)$, $\mathrm{fr}(X)$, X' e um majorante de X.

   Resolução. $\mathrm{int}(X) = A$, $\mathrm{fr}(X) = \{-2, -1, 0\} \cup B$, $X' =]-\infty, -2] \cup [-1, 0]$, e 1 é um majorante de X.

3. Considere a função $f(x) = 1 - x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   (a) Indique o domínio da função f e estude-a quanto à continuidade.

   Resolução. O domínio de f é $D = \mathbb{R} \backslash \{0\}$.
   A função f é contínua em todos os pontos do seu domínio, porque é definida por uma expressão que resulta da composição, produto e subtracção de polinómios, funções racionais e funções trigonométricas, que são funções contínuas.

   (b) Diga, justificando, se f é prolongável por continuidade a $\mathbb{R}$.

   Resolução. A função f é prolongável por continuidade a $\mathbb{R}$ se tiver limite finito quando $x \to 0$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(1 - x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 1$$

   porque a função sin é limitada e x é um infinitésimo, quando $x \to 0$.
   É possível definir o prolongamento contínuo de f a $\mathbb{R}$, que é a função:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 1 - x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0\,, \\ 1 & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

4. Considere a função $f(x)=\sqrt{1+x}$.

   (a) Verifique que é possível aplicar o Teorema de Lagrange à função f em qualquer intervalo da forma $[a,b]$, com $a,b\in\mathbb{R}$, $-1\le a<b$.

   Resolução. Sejam $a,b\in\mathbb{R}$ com $-1\le a<b$.

   O domínio de f é $D_f=[-1,+\infty[$. Como f é contínua em D_f (porque é composição de funções contínuas) e $[a,b]\subseteq D_f$, então f é contínua em $[a,b]$.

   Como $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$ tem domínio $D_{f'}=]-1,+\infty[$, f é diferenciável em $D_{f'}$. Como $]a,b[\subseteq D_{f'}$, f é diferenciável em $]a,b[$.

   Assim, é possível aplicar o Teorema de Lagrange a f em qualquer intervalo da forma $[a,b]$, com $a,b\in\mathbb{R}$, $-1\le a<b$.

   (b) Utilize a alínea anterior para mostrar que $\sqrt{1+x}<1+\dfrac{1}{2}x$, para $x\in\mathbb{R}^+$.

   Resolução. Pela alínea anterior, o Teorema de Lagrange é aplicável à função $f(t)=\sqrt{1+t}$ no intervalo $[0,x]$, com $x\in\mathbb{R}^+$. Então, $\exists\, c\in]0,x[$: $\dfrac{1}{2\sqrt{1+c}}=\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, ou seja, $\dfrac{1}{2\sqrt{1+c}}=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, o que é equivalente a $\dfrac{x}{2\sqrt{1+c}}+1=\sqrt{1+x}$. Como $c>0$, vem que $\dfrac{x}{2\sqrt{1+c}}+1<\dfrac{x}{2\sqrt{1+0}}+1$, e logo $\sqrt{1+x}<1+\dfrac{1}{2}x$, como pretendido.

5. Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ tal que $f(1)=1$ e $f'(1)=2$. Escreva a equação da recta tangente ao gráfico da função $h(x)=f(\mathrm{e}^{\arctan x})$ no ponto $x=0$.

   Resolução. A equação da recta tangente ao gráfico da função $h(x)$ no ponto $x=0$ é $y-h(0)=h'(0)(x-0)$.

   Como $h(0)=f(\mathrm{e}^{\arctan 0})=f(\mathrm{e}^0)=f(1)=1$ e

   $$h'(0)=f'(\mathrm{e}^{\arctan 0})\cdot \mathrm{e}^{\arctan 0}\cdot\frac{1}{1+0^2}=f'(1)=2,$$

   a equação da recta é $y-1=2x\Leftrightarrow y=2x+1$.

6. Calcule o limite $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\ln^2(1+x)}{x^3}$.

   Resolução.

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-\ln^2(1+x)}{x^3}\ \underset{R.C.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\ \lim_{x\to0}\frac{2x-2\ln(1+x)\cdot\dfrac{1}{1+x}}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2}{3(1+x)}\cdot\frac{x+x^2-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$\underset{R.C.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\ \frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1+2x-\dfrac{1}{1+x}}{2x}\ \underset{R.C.}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\ \frac{2}{3}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2+\dfrac{1}{(1+x)^2}}{2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}=1.$$

7. Considere a função $f(x)=(1-2x)\mathrm{e}^{-x}$.

   (a) Determine o domínio, os intervalos de monotonia e extremos relativos de f.

Resolução. Como $\mathrm{e}^x \neq 0$ para qualquer x, $D = \mathbb{R}$.

Para determinar os intervalos de monotonia, observemos que

$$f'(x) = -2\mathrm{e}^{-x} - (1-2x)\mathrm{e}^{-x} = (2x-3)\mathrm{e}^{-x}.$$

Assim,

	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x-3$	$-$	0	$+$
e^{-x}	$+$	$+$	$+$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	m	$\nearrow$

f é crescente em $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$, decrescente em $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$ e tem um mínimo para $x = \frac{3}{2}$.

(b) Determine o sentido das concavidades e pontos de inflexão de f.

Resolução. Para determinar o sentido das concavidades, observemos que

$$f''(x) = 2\mathrm{e}^{-x} - (2x-3)\mathrm{e}^{-x} = (5-2x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Assim,

	$-\infty$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$5-2x$	$+$	0	$-$
e^{-x}	$+$	$+$	$+$
f''	$+$	0	$-$
f	$\cup$	PI	$\cap$

f tem concavidade virada para cima em $\left]-\infty, \frac{5}{2}\right]$, virada para baixo em $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right[$ e tem um ponto de inflexão para $x = \frac{5}{2}$.