INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Departamento de Engenharia Mecânica/Secção de Matemática

Análise Matemática I

Resolução do Teste 2 - 03/04/2007

---

1. Calcule uma primitiva da função $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}$.

Resolução.

$$P\frac{\sqrt{\ln x}}{x} = P\frac{1}{x}(\ln x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}(\ln x)^{\frac{3}{2}}.$$

2. Utilize o método da primitivação por partes, apresentando todos os cálculos, para obter uma primitiva de $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x$.

Resolução. Observemos que $\dfrac{x^2}{1+x^2}\arctan x = \left(1 - \dfrac{1}{1+x^2}\right)\arctan x$.

Por partes, fazendo $u' = 1 - \dfrac{1}{1+x^2}$ e $v = \arctan x$, vem $u = x - \arctan x$ e $v' = \dfrac{1}{1+x^2}$, e

$$\begin{aligned}
&P\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\arctan x = \\
&= x\arctan x - \arctan^2 x - P\left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\arctan x\right) = \\
&= x\arctan x - \arctan^2 x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\arctan^2 x.
\end{aligned}$$

3. Utilize o método da primitivação por substituição, apresentando todos os cálculos, para obter uma primitiva de $f(x) = \dfrac{1}{x^{1/2} + x^{1/3}}$.

Resolução. Consideremos a substituição $\varphi(t) = t^6$. Então $\varphi'(t) = 6t^5$ e

$$\begin{aligned}
&P\frac{1}{x^{1/2} + x^{1/3}} = \\
&= P\frac{1}{t^3+t^2}6t^5 = 6P\left(t^2 - t + 1 - \frac{t^2}{t^3+t^2}\right) = 6P\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right) = \\
&= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| = 2x^{1/2} - 3x^{1/3} + 6x^{1/6} - 6\ln|x^{1/6}+1|.
\end{aligned}$$

4. Apresentando todos os cálculos, obtenha uma primitiva da função racional $f(x) = \dfrac{x-2}{x(x^2+1)}$.

Resolução. Como o denominador de $\dfrac{x-2}{x(x^2+1)}$ tem uma raíz real simples e um par de raízes complexas de multiplicidade 1, temos que $\dfrac{x-2}{x(x^2+1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$, donde $A = -2$, $B = 2$ e $C = 1$. Logo

$$\begin{aligned}
P\frac{x-2}{x(x^2+1)} &= P\left(-\frac{2}{x} + \frac{2x+1}{x^2+1}\right) = P\left(-\frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1}\right) = \\
&= -2\ln|x| + \ln(x^2+1) + \arctan x.
\end{aligned}$$

5. Calcule, apresentando todos os cálculos, $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

Resolução.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \big[\ln(x^2+1)+\arctan x\big]_0^1\\ &= \ln 2+\arctan 1-\ln 1-\arctan 0=\ln 2+\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

6. Calcule, apresentando todos os cálculos, $\displaystyle\int_1^{\ln 2} \frac{1}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}\,\mathrm{d}x$.

Resolução. Consideremos a substituição $\varphi(t)=\ln t$. Então $\varphi'(t)=\dfrac{1}{t}$, $1=\varphi(\mathrm{e})$ e $\ln 2=\varphi(2)$, e

$$\int_1^{\ln 2} \frac{1}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathrm{e}}^2 \frac{1}{t(t-1)}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\int_{\mathrm{e}}^2 \frac{1}{t^2(t-1)}\,\mathrm{d}t.$$

Como $\dfrac{1}{t^2(t-1)}$ é uma função racional e o denominador tem uma raíz real simples e uma raíz real de multiplicidade 2, temos que $\dfrac{1}{t^2(t-1)}=\dfrac{A}{t}+\dfrac{B}{t^2}+\dfrac{C}{t-1}$, donde $A=-1$, $B=-1$ e $C=1$. Logo

$$\begin{aligned}\int_1^{\ln 2} \frac{1}{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)}\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathrm{e}}^2 \left(-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t-1}\right)\mathrm{d}t=\left[-\ln t+\frac{1}{t}+\ln(t-1)\right]_{\mathrm{e}}^2=\\ &= -\ln 2+\frac{1}{2}+1-\frac{1}{\mathrm{e}}-\ln(\mathrm{e}-1).\end{aligned}$$

7. Calcule, apresentando todos os cálculos, $\displaystyle\int_1^2 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x$.

Resolução. Por partes, fazendo $u'=1$ e $v=\ln^2 x$, vem $u=x$ e $v'=\dfrac{2}{x}\ln x$, e

$$P\ln^2 x = x\ln^2 x-2P\ln x.$$

Novamente por partes, fazendo $u'=1$ e $v=\ln x$, vem $u=x$ e $v'=\dfrac{1}{x}$, e

$$P\ln^2 x = x\ln^2 x-2(x\ln x-P1)=x\ln^2 x-2x\ln x+2x.$$

Assim,

$$\int_1^2 \ln^2(x)\,\mathrm{d}x=\big[x\ln^2 x-2x\ln x+2x\big]_1^2=2\ln^2 2-4\ln 2+4-2=2\ln^2 2-4\ln 2+2.$$

8. Mostre, sem calcular os integrais, que

$$\int_{x^2}^{a^2} (\sqrt{t}+2)\,\mathrm{d}t=\int_a^x \big(2-2(t+1)^2\big)\,\mathrm{d}t.$$

Resolução. Consideremos a substituição $\varphi(u) = u^2$. Então $\varphi'(u) = 2u$, $a^2 = \varphi(a)$ e $x^2 = \varphi(x)$, e

$$\begin{aligned}
\int_{x^2}^{a^2} (\sqrt{t}+2)\,\mathrm{d}t &= \int_x^a (u+2)2u\,\mathrm{d}u = \int_x^a (2u^2+4u)\,\mathrm{d}u = \\
&= \int_x^a (2u^2+4u+2-2)\,\mathrm{d}u = \int_x^a (2(u^2+2u+1)-2)\,\mathrm{d}u = \\
&= \int_x^a (2(u+1)^2-2)\,\mathrm{d}u = \int_a^x (2-2(u+1)^2)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

9. Considere a função $F(x) = 3 + \displaystyle\int_1^{1+\sin x} \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Sem resolver a primitiva, calcule a equação da recta tangente ao gráfico de $F(x)$ no ponto $x = 0$.

   Resolução. A equação da recta tangente a F no ponto $x = 0$ é $y - F(0) = F'(0)(x-0)$. Como $F(0) = 3 + \displaystyle\int_1^{1+\sin 0} \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = 3$,

$$F'(x) = \frac{1+\sin x}{1+1+\sin x}\cos x$$

   e $F'(0) = \dfrac{1}{2}$, a equação da recta tangente é $y - 3 = \dfrac{1}{2}x$.

10. Estude quanto à convergência o integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

   Resolução. Como

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to+\infty} \left[\frac{\arctan^2(x)}{2}\right]_1^c = \\
&= \lim_{c\to+\infty} \left(\frac{\arctan^2(c)}{2} - \frac{\arctan^2(1)}{2}\right) = \frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} - \frac{\frac{\pi^2}{16}}{2} = \frac{3\pi^2}{32},
\end{aligned}$$

   o integral é convergente.