INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Departamento de Engenharia Mecânica/Secção de Matemática

Análise Matemática I

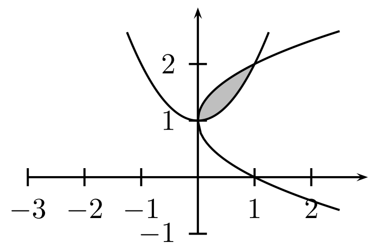
Resolução do Teste 3 - 16/06/2007

---

1. Considere as seguintes linhas: $y = x^2 + 1$ e $x = (y-1)^2$. Determine:

   (a) A área do domínio que elas delimitam.

   Resolução. De $x = (y-1)^2$ vem que $y = \pm\sqrt{x} + 1$, e as duas linhas intersectam-se em $x = 0$ e $x = 1$.



$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} + 1 - (x^2+1))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{2/3} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

   (b) O volume do sólido de revolução gerado pela rotação daquela área em torno do eixo dos yy.

   Resolução.

$$V = 2\pi \int_0^1 x(\sqrt{x} + 1 - x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 (x^{3/2} - x^3)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{10}.$$

2. Utilize o critério da comparação para determinar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.

   Resolução. Como

$$\lim \frac{\left(\dfrac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2 \cdot n^2 = \lim \left(\frac{n+n^3}{1+n^3}\right)^2 = 1$$

   e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ é convergente, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$ é convergente.

3. Utilize o critério da razão para determinar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

   Resolução. Sendo $a_n = \dfrac{n^2}{3^n}$, como

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\dfrac{n^2}{3^n}} = \lim \frac{(n+1)^2 \cdot 3^n}{n^2 \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3} < 1,$$

a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

4. Utilize o critério da raíz para determinar a convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \arcsin^n\left(\frac{1}{n}\right)$.

Resolução. Sendo $a_n = \arcsin^n\left(\frac{1}{n}\right)$, como

$$\lim \sqrt[n]{\arcsin^n\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = \arcsin(0) = 0 < 1,$$

a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

5. Estude quanto à convergência simples e absoluta a série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Resolução. Seja $a_n = (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Então $|a_n| = \frac{1}{\ln(n+1)} \geq \frac{1}{n+1}$. Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$ é divergente, pelo critério da comparação $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ é divergente.

Seja $b_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$. Como b_n é positiva, $\lim b_n = 0$ e $b_{n+1} = \frac{1}{\ln(n+2)} < \frac{1}{\ln(n+1)} = b_n$ (ou seja, b_n é decrescente), pelo critério de Leibniz a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente.

Assim, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é simplesmente convergente.

6. Calcule as séries de potências das seguintes funções em torno de $x = 0$:

   (a) $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$.

   Resolução.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+3x+2} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{1-(-x)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n.\end{aligned}$$

   (b) $f(x) = \sinh x$.

Resolução. Como $f^{(n)}(x) = \sinh x$ se n par e $f^{(n)}(x) = \cosh x$ se n ímpar, vem que

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ par} \\ 1 & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}.$$

Assim,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

7. Obtenha a série de potências da função $f(x) = \mathrm{e}^{1-x}$ em torno de zero, indicando o seu raio de convergência.

   Resolução.

   $$f(x) = \mathrm{e}^{1-x} = \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}(-1)^n x^n}{n!}.$$

   O raio de convergência é $R = \lim \left| \frac{\frac{\mathrm{e}(-1)^n}{n!}}{\frac{\mathrm{e}(-1)^{n+1}}{(n+1)!}} \right| = \lim \frac{(n+1)!}{n!} = +\infty.$

8. Considere a série de potências $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1} x^n}{n!}$, $|x| < \mathrm{e}^{-1}$. Calcule $f^{(501)}(0)$.

   Resolução. Como

   $$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1} x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

   vem que

   $$\frac{(-501)^{500}}{501!} = \frac{f^{(501)}(0)}{501!} \Leftrightarrow f^{(501)}(0) = 501^{500}.$$