INSTITUTO SUPERIOR DE ENGENHARIA DE LISBOA

Departamento de Engenharia Mecânica/Secção de Matemática

Análise Matemática I

Teste Global - 16/06/2007

Duração - 1h 30m

Leia atentamente o enunciado antes de iniciar a sua resolução e apresente todos os cálculos que efectuar.

---

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida pela fórmula

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

Determine:

(1.0) (a) o domínio e as assímptotas;

(1.0) (b) os intervalos de monotonia e extremos relativos;

(1.0) (c) as concavidades e pontos de inflexão.

2. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua cujo contradomínio está contido em $[0,1]$.

(1.5) (a) Mostre que existe um $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.
(Sugestão: aplique o Teorema de Bolzano à função $g(x) = f(x) - x$.)

(1.5) (b) Supondo que f é diferenciável em $]0,1[$ e que $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in]0,1[$, prove que a equação $f(x) = x$ tem uma única solução no intervalo $[0,1]$.
(Sugestão: suponha que existem dois pontos distintos $a, b \in [0,1]$ com $a < b$ tais que $f(a) = a$ e $f(b) = b$ e utilize o Teorema de Rolle para chegar a uma contradição.)

(2.0) 3. Calcule a primitiva de $f(x) = x\tan^2 x$ que passa no ponto $(0, -1)$.
(Sugestão: utilize a fórmula fundamental da trigonometria.)

(2.0) 4. Calcule $\displaystyle\int_0^{\sqrt[3]{\sin^2 1}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}}\,\mathrm{d}x$.

(2.0) 5. Estude quanto à convergência o integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x)}\,\mathrm{d}x$.

(2.0) 6. Considere as seguintes linhas: $y = x^2 + 1$ e $x = (y-1)^2$. Determine a área do domínio que elas delimitam.

(2.0) 7. Utilize o critério da comparação para determinar a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.

(2.0) 8. Estude quanto à convergência simples e absoluta a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}$.

(2.0) 9. Calcule a série de potências da função $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$ em torno de $x = 0$.