

1. Considere a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida pela fórmula

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right).$$

Determine:

(a) o domínio e as assíntotas.

**Resolução.** O domínio de  $f$  é  $D = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

Como

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} = \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) = \arctan\frac{1}{0^\pm} = \arctan(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2},$$

$f$  não tem assíntotas verticais.

Como

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)}{x} = \frac{\arctan 1}{\pm\infty} = 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4},$$

$f$  tem assíntota  $y = \frac{\pi}{4}$  em  $\pm\infty$ .

(b) os intervalos de monotonia e extremos relativos.

**Resolução.** Como

$$f'(x) = \frac{\frac{-1}{(x-1)^2}}{1 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2} = -\frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$$

e  $2x^2 - 2x + 1 > 0$  para todo o  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) < 0$  para todo o  $x$ . Assim,  $f$  é decrescente em  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  e não tem extremos relativos.

(c) as concavidades e pontos de inflexão.

**Resolução.** Como

$$f''(x) = \frac{4x - 2}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

e  $(2x^2 - 2x + 1)^2 > 0$  para todo o  $x \in \mathbb{R}$ , o sinal de  $f''(x)$  é determinado pelo sinal de  $4x - 2$ . Assim,  $f$  tem concavidade virada para baixo em  $\left] -\infty, \frac{1}{2} \right[$ , virada para cima em  $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[ \setminus \{1\}$  e tem um ponto de inflexão para  $x = \frac{1}{2}$ .

2. Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua cujo contradomínio está contido em  $[0, 1]$ .

(a) Mostre que existe um  $x \in [0, 1]$  tal que  $f(x) = x$ .

(Sugestão: aplique o Teorema de Bolzano à função  $g(x) = f(x) - x$ .)

**Resolução.** Como  $f(x)$  é contínua em  $[0, 1]$ , a função  $g(x) = f(x) - x$  é contínua em  $[0, 1]$ . Mais,  $g(0) = f(0) - 0 > 0$  e  $g(1) = f(1) - 1 < 0$ , donde, pelo Teorema de Bolzano, existe  $c \in ]0, 1[$  tal que  $g(c) = 0$ , ou seja, tal que  $f(c) = c$ .

(b) Supondo que  $f$  é diferenciável em  $]0, 1[$  e que  $f'(x) \neq 1$  para todo  $x \in ]0, 1[$ , prove que a equação  $f(x) = x$  tem uma única solução no intervalo  $[0, 1]$ .

(Sugestão: suponha que existem dois pontos distintos  $a, b \in [0, 1]$  com  $a < b$  tais que  $f(a) = a$  e  $f(b) = b$  e utilize o Teorema de Rolle para chegar a uma contradição.)

**Resolução.** Suponhamos que  $f$  é diferenciável em  $]0, 1[$  e que  $f'(x) \neq 1$  para todo  $x \in ]0, 1[$ . Se existirem dois pontos distintos  $a, b \in [0, 1]$  com  $a < b$  tais que  $f(a) = a$  e  $f(b) = b$ , então a função  $g(x) = f(x) - x$  definida na alínea anterior é contínua em  $[a, b]$ , diferenciável em  $]a, b[$  e  $g(a) = g(b) = 0$ . Pelo Teorema de Rolle, existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $g'(c) = 0$ , ou seja, tal que  $f'(c) = 1$ , o que contradiz a condição  $f'(x) \neq 1$  para todo  $x \in ]0, 1[$ . Logo  $f(x) = x$  tem uma única solução em  $[0, 1]$ .

3. Calcule a primitiva de  $f(x) = x \tan^2 x$  que passa no ponto  $(0, -1)$ .

(Sugestão: utilize a fórmula fundamental da trigonometria.)

**Resolução.** Da fórmula fundamental da trigonometria vem que  $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ .

Assim,  $f(x) = x \tan^2 x = x \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)$ . Primitivando por partes, com  $u' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$  e  $v = x$ , vem  $u = \tan x - x$  e  $v' = 1$ , e as primitivas de  $f$  são da forma

$$F(x) = x \tan x - x^2 - P(\tan x - x) = x \tan x - x^2 + \ln |\cos x| + \frac{x^2}{2} = x \tan x - \frac{x^2}{2} + \ln |\cos x| + k.$$

Como  $F(0) = -1$ , vem  $k = -1$ , e a primitiva pretendida é

$$F(x) = \frac{x^2}{2} = x \tan x - \frac{x^2}{2} + \ln |\cos x| - 1.$$

4. Calcule  $\int_0^{\sqrt[3]{\sin^2 1}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}} dx$ .

**Resolução.** Consideremos a substituição  $\varphi(t) = t^2$ . Então  $\varphi'(t) = 2t$ ,  $\varphi^{-1}(0) = 0$  e  $\varphi^{-1}(\sqrt[3]{\sin^2 1}) = \sqrt[3]{\sin 1}$ , e

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt[3]{\sin^2 1}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}} dx &= \int_0^{\sqrt[3]{\sin 1}} \frac{t}{\sqrt{1-t^6}} \cdot 2t dt = \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt[3]{\sin 1}} \frac{3t^2}{\sqrt{1-(t^3)^2}} dt = \\ &= \frac{2}{3} [\arcsin t^3]_0^{\sqrt[3]{\sin 1}} = \frac{2}{3} (\arcsin(\sin 1) - \arcsin 0) = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

5. Estude quanto à convergência o integral  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x)} dx$ .

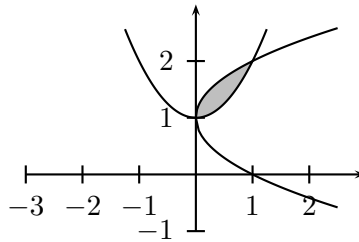
**Resolução.** A função  $f(x) = \frac{1}{x^2(1+x)}$  é uma função racional, e o denominador tem uma raiz real simples e uma raiz real de multiplicidade 2. Assim,  $f(x)$  pode ser escrita na forma

$f(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}$ . Resolvendo o sistema, vem que  $A = -1$ ,  $B = 1$  e  $C = 1$ . Logo,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2(1+x)} dx &= \\ &= \int_1^{+\infty} \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ -\ln x - \frac{1}{x} + \ln(x+1) \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{x} + \ln \frac{x+1}{x} \right]_1^b = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( -\frac{1}{b} + \ln \frac{b+1}{b} + 1 - 1 \ln 2 \right) = 0 + \ln 1 + 1 - \ln 2 = 1 - \ln 2. \end{aligned}$$

6. Considere as seguintes linhas:  $y = x^2 + 1$  e  $x = (y - 1)^2$ . Determine a área do domínio que elas delimitam.

**Resolução.** De  $x = (y - 1)^2$  vem que  $y = \pm\sqrt{x} + 1$ , e as duas linhas intersectam-se em  $x = 0$  e  $x = 1$ .



$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} + 1 - (x^2 + 1)) dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \left[ \frac{2}{3}x^{2/3} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

7. Utilize o critério da comparação para determinar a convergência da série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2$ .

**Resolução.** Como

$$\lim \frac{\left( \frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2}{\frac{1}{n^2}} = \lim \left( \frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2 \cdot n^2 = \lim \left( \frac{n+n^3}{1+n^3} \right)^2 = 1$$

e a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$  é convergente, a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2$  é convergente.

8. Estude quanto à convergência simples e absoluta a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}$ .

**Resolução.** Seja  $a_n = (-1)^n \frac{1}{\ln(n+1)}$ .

Então  $|a_n| = \frac{1}{\ln(n+1)} \geq \frac{1}{n+1}$ . Como  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$  é divergente, pelo critério da comparação  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$  é divergente.

Seja  $b_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$ . Como  $b_n$  é positiva,  $\lim b_n = 0$  e  $b_{n+1} = \frac{1}{\ln(n+2)} < \frac{1}{\ln(n+1)} = b_n$

(ou seja,  $b_n$  é decrescente), pelo critério de Leibniz a série  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é convergente.

Assim,  $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$  é simplesmente convergente.

9. Calcule a série de potências da função  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$  em torno de  $x = 0$ .

**Resolução.**

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 + 3x + 2} &= \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{1-(-x)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n. \end{aligned}$$